Correction des exercices du bac

I Nouvelle Calédonie mars 2015

1. (a) D'après l'énoncé la fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $\boxed{f_2'(x) = \mathrm{e}^x - 2}$.

Or $\mathrm{e}^x - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$. Donc :

Donc $\mathrm{e}^x - 2 > 0 \iff x > \ln 2$: la fonction f est décroissante sur $[-\infty\,;\,\ln 2[$.

$\mathrm{e}^x - 2 < 0 \iff x < \ln 2$: la fonction f est croissante sur $[\ln 2\,;\,+\infty[$.

$f_2(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} - 2 \times \ln 2 = 2 - 2\ln 2$ est le minimum de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$2 - 2\ln 2$	$\nearrow$	

(b) Comme $2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$ car $2 < \mathrm{e} \Rightarrow \ln 2 < \ln \mathrm{e} = 1$, le minimum de la fonction f_2 étant supérieur à zéro, on en déduit que la fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit

$\mathrm{e}^x - 2x > 0 \iff \mathrm{e}^x > 2x$ donc la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est au dessus de la droite Δ_2.

Γ et Δ_2 n'ont pas de point commun.

2. $f_a(x) = \mathrm{e}^x - ax$

(a) • limite en plus l'infini :

$f_a(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - a\right)$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (croissances comparées) donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} - a = +\infty$, donc par produit des limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$.

• limite en moins l'infini :

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$.

(b) f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et

$f_a'(x) = \mathrm{e}^x - a$.

$\mathrm{e}^x - a = 0 \iff \mathrm{e}^x = a \iff x = \ln a$ (car $a > 0$).

On a le même tableau de variations que pour f_2 en remplaçant 2 par a.

(c) La fonction f_a décroissante, puis croissante admet donc un minimum $f_a(\ln a) = a - a\ln a$.

(d) $a - a\ln a = 0 \iff a(1 - \ln a) = 0 \iff 1 - \ln a = 0$ (car $a \neq 0$) $\iff$

$1 = \ln a \iff \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^{\ln a} \iff \mathrm{e} = a$.

On a donc :

• $a - a\ln a > 0 \iff a < \mathrm{e}$: le minimum est positif, donc comme à la question 1, la fonction f_a est strictement positive et la courbe et la droite n'ont pas de point commun.

• $a - a\ln a < 0 \iff a > \mathrm{e}$: le minimum est inférieur à zéro.

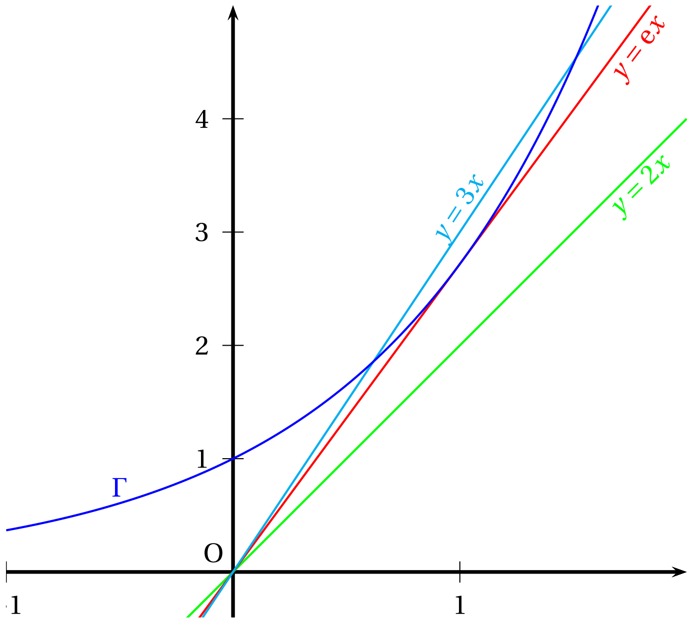
x	$-\infty$		$\ln a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$a - a\ln a$	$\nearrow$	

Donc sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln a[$, la fonction f_a continue car dérivable et strictement monotone sur cet intervalle passe d'une valeur positive à une valeur négative : il existe donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel $\alpha \in]-\infty\,;\,\ln a[$ tel que $f_a(\alpha) = 0$, soit $\mathrm{e}^{\alpha} = a\alpha$ (unique, car la fonction est monotone sur cet intervalle).

De même sur $]\ln a\,;\,+\infty[$, la fonction f_a continue car dérivable et strictement monotone sur cet intervalle passe d'une valeur négative à une valeur positive : il existe donc un réel $\beta \in]\ln a\,;\,+\infty[$ tel que $f_a(\beta) = 0$, soit $\mathrm{e}^{\beta} = a\beta$.

Conclusion : si $a > \mathrm{e}$ la courbe Γ et la droite Δ_a ont deux points communs.

- $a - a\ln a = 0 \iff a = \mathrm{e}$, la fonction $f_a = f_{\mathrm{e}}$ s'annule une seule fois en $x = 1$, donc $f_{\mathrm{e}}(1) = 0$: Γ et Δ_{e} ont un seul point commun (la droite est tangente à la courbe)



II Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

(a) On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ et

$u_3 = \sqrt{2u_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1.8340$ à 10^{-4} près.

(b) Cet algorithme permet le calcul du terme de rang n.

(c) D'après le tableau des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

2. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

- Initialisation

On a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$

- Hérédité

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n \leqslant 2$.

On a : $0 < u_n \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 < 2u_n \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2u_n} \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

- Conclusion

$0 < u_0 \leqslant 2$

Si $0 < u_n \leqslant 2$ alors $0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

D'après l'axiome de récurrence on a pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

(b) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

Comme pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, comparons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{2u_n}{u_n^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{u_n}}$.

Et comme on a démontré précédemment que $u_n \leqslant 2$, alors $\dfrac{2}{u_n} \geqslant 1$ et $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} \geqslant 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; (u_n) est une suite croissante.

(c) On vient de prouver que d'une part la suite (u_n) est strictement croissante et que d'autre part elle est majorée par 2.

Ceci démontre que la suite (u_n) est convergente.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

(a) Pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$ donc en particulier :

$u_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

On a aussi pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$, mais $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Alors : $v_{n+1} = \ln\sqrt{2u_n} - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln 2) - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 2) = \dfrac{1}{2}v_n$

On peut en conclure que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

(b) On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $v_n = -\ln 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$v_n = \ln(u_n) - \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right) = v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{2} = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = 2e^{v_n}$. u_n en fonction de n.

(c) Comme $\dfrac{1}{2} \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x\right) = 1$, alors par composition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{v_n}\right) = 1$ et finalement :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 2$

(d) L'algorithme ci-dessous permet d' afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1{,}999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1{,}999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n