TS : Propriétés algébriques des nombres complexes

I Produit

1. Soit a et b deux réels quelconques.
   Montrer que $(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab$.
2. Calculer $(1+\mathrm{i})^2$, $(1+\mathrm{i})^3$ et $(1+\mathrm{i})^4$.
3. On pose $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Calculer j^2 puis j^3.
   (b) En déduire j^n selon les valeurs de n.

II

1. Soit $z = 3+4\mathrm{i}$; calculer $z\overline{z}$.
2. Soit $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. Calculer $z\overline{z}$.
   Pouvait-on deviner la réponse sans calcul ?

III Inverse d'un nombre complexe

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$A = \frac{1}{\mathrm{i}}$

$B = \frac{1}{2+3\mathrm{i}}$

$C = \frac{1}{7-4\mathrm{i}}$

$D = \frac{1}{j}$ où $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

IV Quotient de deux nombres complexes

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$A = \frac{2+3\mathrm{i}}{5-7\mathrm{i}}$ | $B = \frac{5+9\mathrm{i}}{5-9\mathrm{i}}$

V

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on associe, à tout point M d'affixe z ; le point M' d'affixe $z' = \frac{z-3}{\mathrm{i}z+2}$.
On désigne par A le point d'affixe 3 et par B celui d'affixe 2i.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x' et y' réels.
   Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. Démontrer que l'ensemble Γ des points M du plan, tels que M' soit un point de l'axe des réels $(0\,;\,\overrightarrow{u})$, est le cercle de diamètre $[AB]$ privé d'un point que l'on précisera.
3. Résoudre l'équation $\frac{z-3}{\mathrm{i}z+2} = 1$.
   On désigne par K le point d'affixe $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$.
   Justifier sans calcul que $K \in \Gamma$.

TS : Propriétés algébriques des nombres complexes

VI Produit

1. Soit a et b deux réels quelconques.
   Montrer que $(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab$.
2. Calculer $(1+\mathrm{i})^2$, $(1+\mathrm{i})^3$ et $(1+\mathrm{i})^4$.
3. On pose $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Calculer j^2 puis j^3.
   (b) En déduire j^n selon les valeurs de n.

VII

1. Soit $z = 3+4\mathrm{i}$; calculer $z\overline{z}$.
2. Soit $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. Calculer $z\overline{z}$.
   Pouvait-on deviner la réponse sans calcul ?

VIII Inverse d'un nombre complexe

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$A = \frac{1}{\mathrm{i}}$

$B = \frac{1}{2+3\mathrm{i}}$

$C = \frac{1}{7-4\mathrm{i}}$

$D = \frac{1}{j}$ où $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

IX Quotient de deux nombres complexes

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$A = \frac{2+3\mathrm{i}}{5-7\mathrm{i}}$ | $B = \frac{5+9\mathrm{i}}{5-9\mathrm{i}}$

X

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$, on associe, à tout point M d'affixe z ; le point M' d'affixe $z' = \frac{z-3}{\mathrm{i}z+2}$.
On désigne par A le point d'affixe 3 et par B celui d'affixe 2i.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x' et y' réels.
   Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2. Démontrer que l'ensemble Γ des points M du plan, tels que M' soit un point de l'axe des réels $(0\,;\,\overrightarrow{u})$, est le cercle de diamètre $[AB]$ privé d'un point que l'on précisera.
3. Résoudre l'équation $\frac{z-3}{\mathrm{i}z+2} = 1$.
   On désigne par K le point d'affixe $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$.
   Justifier sans calcul que $K \in \Gamma$.