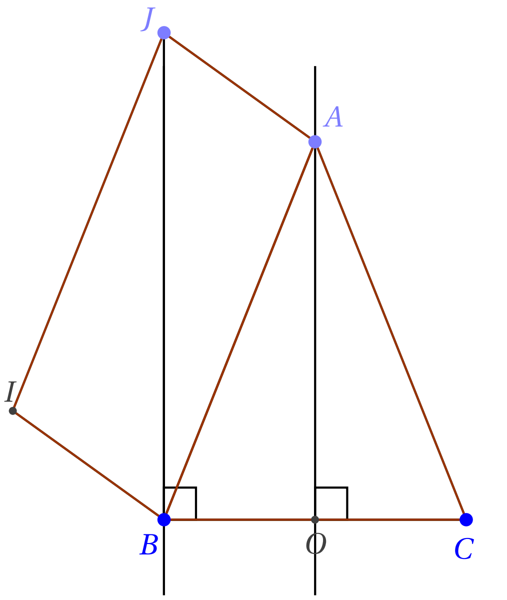
Exercices sur le produit scalaire dans le plan

I

Dans la figure ci-dessous : ABC est un triangle isocèle en A, AIBJ est un parallélogramme et BC = 4.
Calculer les produits scalaires suivants :



1. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$
2. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC}$
3. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ}$
4. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IA}$
5. $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BI}$
6. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI}$

II

Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 3$ et $AC = 5$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AB}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$.
2. En calculant $\overrightarrow{AB}^2$, exprimer AB^2 à l'aide de AC, BC et $\cos\widehat{C}$.
3. En déduire une mesure de $\widehat{C}$.
4. Calculer, en degrés, une mesure approchée au centième de $\widehat{A}$.

III Relation métrique du parallélogramme :

Soit ABCD un parallélogramme.
Montrer que la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des quatre cotés, c'est-à-dire que :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right)$$

(utiliser une des identités remarquables concernant les produits scalaires et la relation de Chasles).

IV

On considère les points A(; 1) et B(-1 ; 3).

1. Déterminer une équation de la tangente en B au cercle $\mathscr{C}$ de centre A passant par B.
2. Déterminer une équation du cercle C.

Correction

I

1. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BQ} = 4 \times 2 = 8$
2. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{BC}.BC = 4^2 = 16$
3. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OB} = -4 \times 2 = -8$
4. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}.0\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JA} + 4 \times 2 = 4 \times 2 + 8 = 16$
5. $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{OB} = -2^2 = -4$.
6. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI} = -4^2 + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ} = -16 - 4 \times 2 = -24$

II

1. $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = BC^2 + AC^2 - 2CA \times CB \times \cos\widehat{C}$.

   On en déduit : $\cos\widehat{C} = -\dfrac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{2AC \times BC} = -0,5$ donc $\widehat{C} = 120\ ^\circ$
2. On trouve de même $\widehat{A} \approx 21,79\ ^\circ$..

I

$ABCD$ est un parallélogramme.

$AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)^2 = AB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + BC^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$

$= AB^2 + BC^2 + BC^2 + CD^2 + +2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = AB^2 + BC^2 + BC^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$

$= AB^2 + BC^2 + BC^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{0} = AB^2 + BC^2 + BC^2 + CD^2$.

$\boxed{AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + BC^2 + CD^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right)}$.

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

II

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$! est un vecteur normal de la tangente qui admet donc une équation de la forme :

   $$-3x + 2y + c = 0.$$

   La tangente doit passer par B. On en déduit que $-3 \times (-1) + 2 \times 3 + c = 0$ donc $c = -9$.
   Une équation de la tangente est donc : $-3x + 2y - 9 = 0$.
2. Le rayon du cercle est égal à la distance AB. Or, $AB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.
   Une équation du cercle est donc $(x - x_A)^2 + \left(y - yA\right)^2 = 13$, c'est à dire $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$.