TS : TD sur les dérivées (semaine du 17/1/2017)

I

Soient les fonctions f et g définies sur $]-\infty\,;\,0[$ par :
$f(x)=x^2-x$ et $g(x)=\dfrac{3}{x}$.
Démontrez que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent des tangentes parallèles au point d'abscisse -1.

II

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
On note f' la fonction dérivée de f, f'' la dérivée de f' $\left(f''=\left(f'\right)'\right)$, $f^{(3)}$ la dérivée de f'' et plus généralement $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer alors l'expression de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n.
3. La démontrer.

III

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin x$.

a) Déterminer les dérivées successives f', f'', $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.
b) Établir que, pour tout réel x,

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

IV Utilisation d'une fonction auxiliaire

Partie A
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x\sqrt{x^2+1}-1.$$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g.
3. Démontrer qu'il existe un unique α tel que $g(\alpha)=0$.
Donner un encadrement de $\alpha=0{,}1$ près.
4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.
3. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^4-3}{3\alpha}$; en déduire une valeur approchée.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
Dresser alors le tableau de variation de f.

TS : TD sur les dérivées (semaine du 17/1/2017)

I

Soient les fonctions f et g définies sur $]-\infty\,;\,0[$ par :
$f(x)=x^2-x$ et $g(x)=\dfrac{3}{x}$.
Démontrez que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent des tangentes parallèles au point d'abscisse -1.

II

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
On note f' la fonction dérivée de f, f'' la dérivée de f' $\left(f''=\left(f'\right)'\right)$, $f^{(3)}$ la dérivée de f'' et plus généralement $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer alors l'expression de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n.
3. La démontrer.

III

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin x$.

a) Déterminer les dérivées successives f', f'', $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.
b) Établir que, pour tout réel x,

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

IV Utilisation d'une fonction auxiliaire

Partie A
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=x\sqrt{x^2+1}-1.$$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g.
3. Démontrer qu'il existe un unique α tel que $g(\alpha)=0$.
Donner un encadrement de $\alpha=0{,}1$ près.
4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\sqrt{x^2+1}.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.
3. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^4-3}{3\alpha}$; en déduire une valeur approchée.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
Dresser alors le tableau de variation de f.