

## TS : exercices sur la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires

### I

- À l'aide d'une calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de l'équation :

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

- Montrer que l'intervalle  $[-1 ; 2]$  contient une seule des solutions précédentes.

### II

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^5 + x^3.$$

- Étudier les variations de  $f$ .
- Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha$ .
- Donner un encadrement d'amplitude 0,001 de  $\alpha$ .

### III

- Conjecturer pour quelle(s) valeur(s) de  $k$  l'équation  $\frac{1}{3}x^3 - x^2 = k$  admet une unique solution.
- Démontrer cette conjecture.

### IV

Soit l'équation :  $x^3 + x - 14 = 0$ .

- Montrer que cette équation n'a aucune solution négative.
- Étudier le nombre de solutions sur  $\mathbb{R}^+$ . Donner un encadrement de la ou des solution(s) à  $10^{-3}$  près.

### V

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ , qui prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

Par conséquent :  $\forall x \in [0 ; 1], f(x) \in [0 ; 1]$ .

Démontrer que  $f$  a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $x$  de  $[0 ; 1]$  tel que  $f(x) = x$ .