TS TD sur les suites (2)

I

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Justifier que, pour tout k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
3. En déduire la limite de la suite $(_n)$.

II

Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin n}{n+1}\right)$.

III Vrai ou Faux ?

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

1. Si une suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$.
2. Si une suite (u_n) converge vers $+\infty$, alors la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ converge vers 0.
3. Si une suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$ converge vers 0.
4. Si une suite (u_n) tend vers $+\infty$ et si une suite (v_n) est convergente, alors la suite (w_n) définie par $w_n = u_n v_n$ tend vers vers $+\infty$.

IV

Dans chacun des cas suivants, trouver une suite (u_n) et une suite (v_n) telles que :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 5$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 5$.

V

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que la suite est majorée par $\sqrt{3}$.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
5. On considère la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}.$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n