NOM : PRENOM :

Devoir surveillé commun n° 1 - TS1 & TS2 - 01/10/16 - Durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé. Tout résultat doit être soigneusement justifié. La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la suite (u_n) :

1. $u_n = -2n^3 + 5n^2 - 4n + 1$
2. $u_n = \dfrac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 + 5}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n}(n^2 + 5n - 7)$
4. $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

Exercice 2 :

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ est divisible par 5.

Exercice 3 :

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 4 :

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et telle qu'aucun de ses termes ne soit nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{4}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
2. Si la suite (u_n) est minorée par 2, alors la suite (v_n) est minorée par 2.
3. Si la suite (u_n) est décroissante, alors la suite (v_n) est croissante.
4. Si la suite (u_n) est divergente, alors la suite (v_n) admet 0 comme limite.

Exercice 5 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

   c. Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$ en fonction de n.

   Indication : on regroupera les termes judicieusement de manière à pouvoir utiliser les deux formules donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique et celle des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 6 :

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1, \; u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \; u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   a. Calculer v_0.

   b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

   c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   a. Calculer w_0.

   b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

   c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$. Que peut-on en déduire quant à la nature de la suite (w_n) ?

   d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Déduire des questions $2d$ et $3d$ que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Bonus :

Soit (u_n) une suite convergeant vers 2.

Montrer que tous les termes de la suite sont positifs à partir d'un certain rang.