TS1-TS2 : contrôle commun n° 4 (4 heures)

Ce sujet comporte quatre exercices ; l'exercice IV est à choisir en fonction de la spécialité suivie.

I

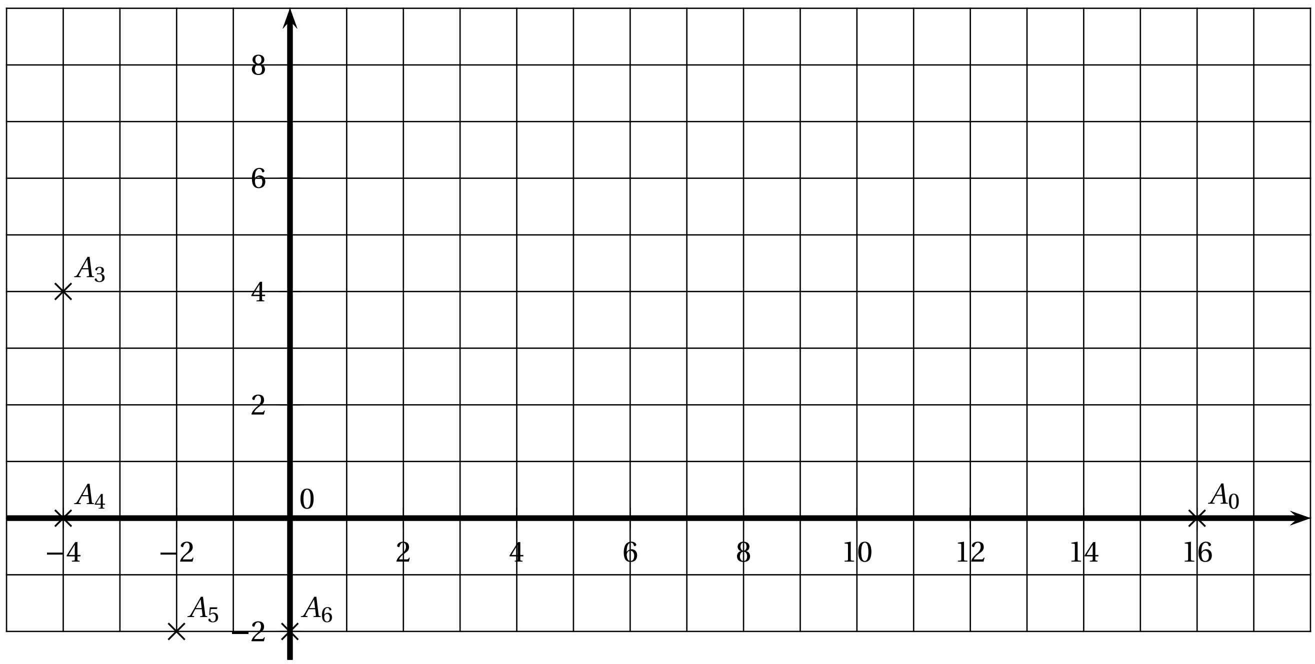
On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. *a.* Calculer z_1, z_2 et z_3.

   b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique ci-dessous.



   c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.

   d. Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_0A_1$ est isocèle rectangle en A_1.

2. *a.* Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   b. La suite (r_n) est-elle convergente ?

   c. Interpréter géométriquement le résultat précédent.

3. On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

   Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

   b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

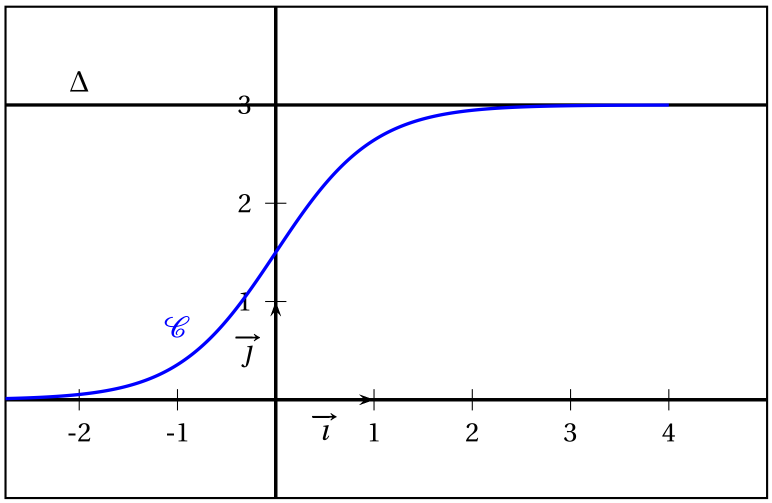
II

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.
   c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par $\left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0 \\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3 \end{array}\right.$
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

III

Les deux parties sont indépendantes.

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large.

Sa démarche est très particulière :

- soit il avance d'un pas tout droit ;
- soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

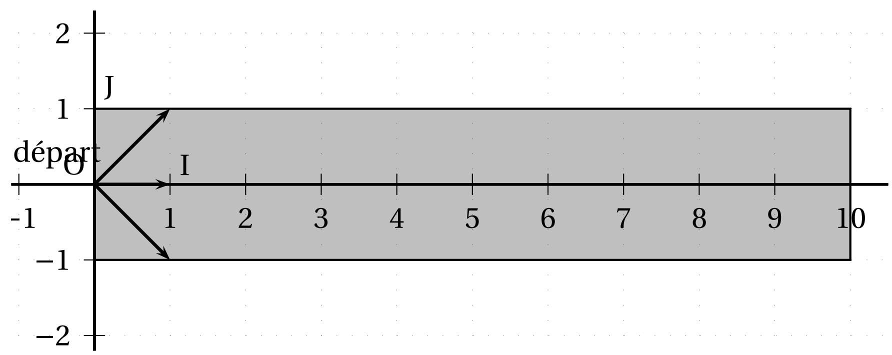
L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : Modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I, J)$ comme l'indique la figure ci-dessous.

On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées (0 ; 0) au début de la traversée.

On note $(x ; y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ⩾ −1 et y ⩽ 1 et x ⩽ 9
        Affecter à n une valeur choisie au hasard entre −1, 0 et 1
        Affecter à y la valeur y + n
        Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
```

1. On donne les couples suivants : $(-1 ; 1)$; $(10 ; 0)$; $(2 ; 4)$; $(10 ; 2)$.

   Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x ; y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

- A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
- B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
- C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

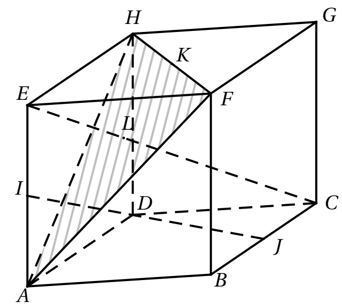
1. Justifier que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a :
$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{array}\right. .$$
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.
4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.
5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu ci-dessous la feuille de calcul qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.
Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

IV

Réservé aux candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:
$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
On appelle $\mathscr{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment $[AE]$,
le point J est le milieu du segment $[BC]$,
le point K est le milieu du segment $[HF]$,
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question, la lettre correspondant à la réponse choisie ***ainsi que la justification de votre réponse****. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une absence de réponse ou une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

1. *a.* Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
   d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
2. *a.* Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
   b. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à (-1).
   c. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
   d. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 2.
3. Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:
   a. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y+z-1=0$.
   b. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x-y+z=0$.
   c. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$.
   d. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$.
4. *a.* $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   b. $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   c. $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   d. $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
5. *a.* $\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
   b. $\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.
   c. $\overrightarrow{ID}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
   d. $\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

IV

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$7x - 5y = 1.$$

   (a) Vérifier que le couple $(3\,;4)$ est solution de (E).

   (b) Montrer que le couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si

$$7(x-3) = 5(y-4).$$

   (c) Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts.

   Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

   - Lorsqu'on est en A :

   Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

   - Lorsqu'on est en B :

   Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

   - Lorsqu'on est en C :

   Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

   Au départ, le pion est sur le sommet A.

   Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

   On note X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$.

   Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n,

   $X_{n+1} = X_n T$.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}.$$

   (a) À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

   (b) Montrer que $T^n = PD^nP^{-1}$.

   (c) Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi :

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On admet que :

$\alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

   (a) Déterminer les nombres a_n, b_n, à l'aide des coefficients α_n et β_n. En déduire c_n.

   (b) Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

   (c) Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire?