TS1-TS2 : contrôle commun n° 3 (4 heures)

I

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
Le graphique sera fait sur l'annexe (page 5).

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique fourni en annexe, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   (a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$

   (b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

II

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ (unité graphique 5 cm).

Partie A

Soit la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout réel positif x, $f_1'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}$.
   En déduire le sens de variation de f_1.
2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.
4. On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à Δ.
   Δ et $\mathscr{C}_1$ sont tracées sur l'annexe II. On complètera la figure dans les parties suivantes.

Partie B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_3(x) = x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ et on appelle $\mathscr{C}_3$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a le même signe que $\left(3 - 2x^2\right)$.
   En déduire le sens de variation de f_3.
2. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_3$.
3. Tracer $\mathscr{C}_3$ dans le même repère que $\mathscr{C}_1$ (on admettra que $\mathscr{C}_3$ a la même asymptote qur $\mathscr{C}_1$ au voisinage de $+\infty$).

Partie C

On désigne par n un entier naturel n non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x^2}$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.
2. On appelle S_n le point de $\mathscr{C}_n$ d'abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$.
   Montrer que, pour tout n, $\mathscr{C}_n$ passe par S_2.
   Placer S_1, S_2 et S_3 sur la figure.

III

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A$(1\,;1\,;1)$ appartient-il au plan P_m ?
2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d)\ :\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

3. (a) Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.
   (c) Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.
4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10\leqslant m\leqslant 10 \quad \text{et} \quad -10\leqslant m'\leqslant 10.$$

   On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.
   (a) Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.
   (b) Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0.$$

   (c) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0$
	Alors Afficher $\left(m\,;\,m'\right)$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

   Quel est le rôle de cet algorithme ?
   (d) Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\,;\,1)$, $(0\,;\,1)$ et $(5\,;\,-4)$.
   Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

IV

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   (b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   (b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

   (a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   (b) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

IV (spécialité)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.
On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.
Ainsi $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Partie A

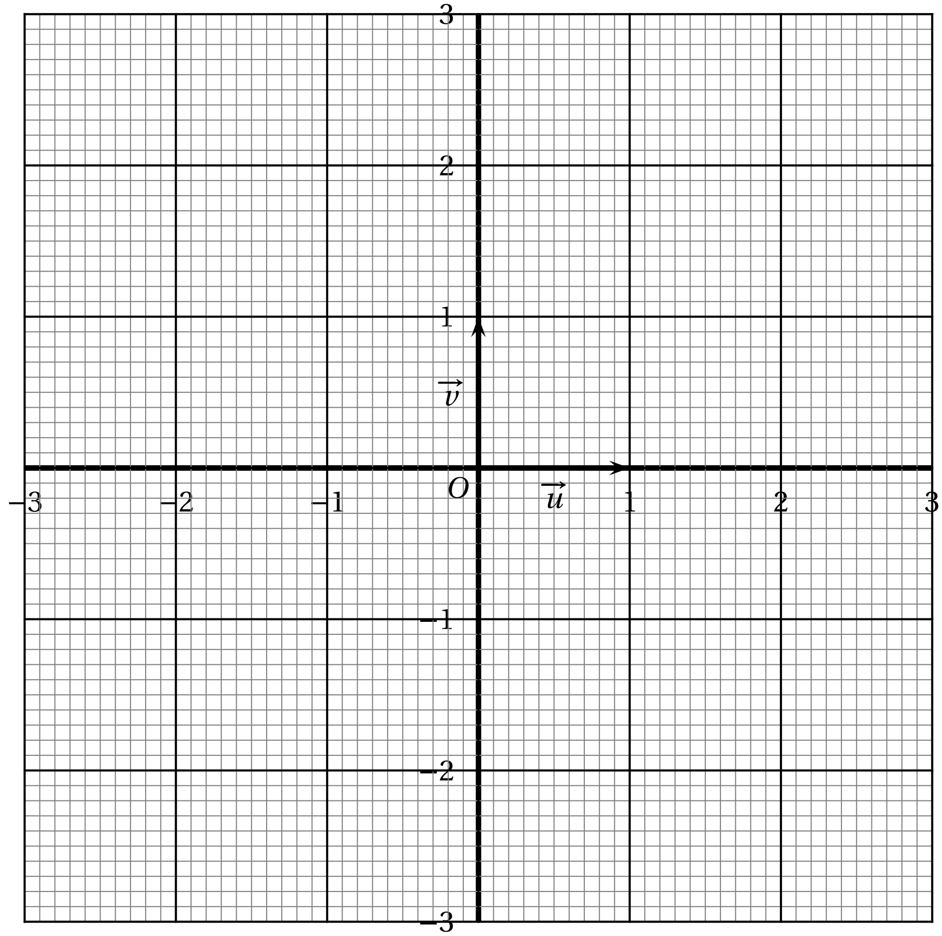
1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.
2. Déterminer a_1 et b_1.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n,
   $$X_{n+1} = AX_n$$
   .
   (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.
   (c) Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30}. En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n,
   $$a_{n+1} + b_{n+1} = 1$$
   .
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$X_{n+1} = DX_n + B.$$
2. On pose, pour tout entier naturel n,
   $$Y_n = X_n - 10B.$$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n,
   $$Y_{n+1} = DY_n.$$
   (b) On admet que pour tout entier naturel n,
   $$Y_n = D^n Y_0.$$
   En déduire que pour tout entier naturel n,
   $$X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B.$$
   (c) Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n.
3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?

NOM :
CLASSE :

ANNEXE À L'EXERCICE I



ANNEXE À L'EXERCICE II