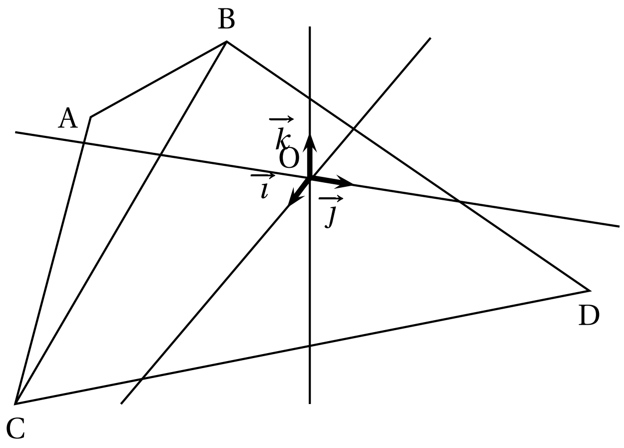
TS1-TS2 : contrôle commun n° 2 (4 heures)

Les exercices I, III et IV sont communs à tout le monde, l'exercice II est à choisir selon que l'élève suit ou non l'enseignement de spécialité

Exercice 1 (5points)

L'espace E est rapporté au repére orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(3\,;\,-2\,;\,2)\quad;\quad B(6\,;\,1\,;\,5)\quad;\quad C(6\,;\,-2\,;\,-1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$.
   Montrer que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B

1. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$.
   Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume du tétraèdre $ABDC$.
3. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4. (a) Calculer l'aire du triangle BDC.
   (b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

Exercice II (5points)

*(pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité)*

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
On appelle :

- $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$,
- $\mathscr{Q}$ le plan d'équation $3x + y - z = 0$,
- Δ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \quad , \; t \in \mathbb{R} \\ z = -4 \end{cases}$$

1. Démontrer que Δ est parallèle au plan $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
2. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont sécants en une droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & s \\ y & = & 2s + 5 \\ z & = & 5s + 5 \end{array}\right. \quad \text{où } s \text{ est un nombre réel.}$$

3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier précisément vos réponses :

   - **Affirmation 1** : $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{R}$ d'équation : $-5x + 5y - z = 0$.

   Soit $\mathscr{D}'$ la droite de l'espace de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -3r \\ y & = & 1 + r \\ z & = & 2 + 2r \end{array}\right. \quad \text{où } r \text{ est un nombre réel.}$$

   - **Affirmation 2** : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.

Exercice II (5 points)

*(pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité)*

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel
	b est un entier naturel
	c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0
	Demander la valeur de a
	Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a \geqslant b$
	Affecter à c la valeur $c+1$
	Affecter à a la valeur $a-b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher c
	Afficher a

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$.
2. Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$9m+5 \equiv p \quad [26] \Leftrightarrow m \equiv 3p-15 \quad [26]$$

   (a) On suppose que $9m+5 \equiv p \quad [26]$, démontrer que $m \equiv 3p-15 \quad [26]$.

   (b) Réciproquement, on suppose que $m \equiv 3p-15 \quad [26]$, démontrer que $9m+5 \equiv p \quad [26]$.

3. Décoder alors la lettre B.

Exercice III **(5 points)**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. (a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant n - 2$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
   (c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
   (d) En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

Exercice IV **(5 points)**

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.
On note A l'événement « l'urne a est choisie » , B l'événement « l'urne b est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».
On note $p_{\text{A}}(\text{R})$ la probabilité conditionnelle de l'événement R par rapport à l'événement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.
   (a) Déterminer les probabilités suivantes : $p(\text{A}),\ p_{\text{A}}(\text{R}),\ p(\text{A} \cap \text{R})$.
   (b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (c) Montrer que
   $$p(R) = \frac{13}{30}$$
   (d) Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?
2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5 - n$.
   (a) Exprimer $p_{\text{A}}(\text{R})$ et $p_{\text{B}}(\text{R})$ en fonction de n.
   (b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (c) Démontrer que
   $$p(\text{R}) = \frac{-n^2 + 4n + 10}{(4+n)(7-n)}.$$
   (d) On sait que n est un entier inférieur ou égal à 5. n ne prend donc que six valeurs entières. Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de $p(\text{R})$.