TS2 : devoir sur table n° 2 bis (4 heures)

Les calculatrices sont autorisées

Exercice I

On considére deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

étape n ($n \geqslant 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A_n l'événement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer p_3.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
   (b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   (c) En Déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.
   (d) On admet que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$.
   En déduire la valeur de ℓ.

Exercice II

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées :

$$\mathrm{A}\left(1\,;\,-\sqrt{3}\,;\,0\right)\,;\,\mathrm{B}\left(1\,;\,\sqrt{3}\,;\,0\right)\,;\,\mathrm{C}(-2\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{D}\left(0\,;\,0\,;\,2\sqrt{2}\right).$$

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.
2. On note $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & t\sqrt{2} \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}$$

   (a) Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.
   (b) Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABD).
3. (a) On note L le milieu du segment [AC].
   Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).
   (b) Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.
4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

Exercice III

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1}+\frac{6}{n}.$$

1. (a) Calculer u_1.

   (b) Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621. A partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à
   $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

Exercice IV

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :
- la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.
- la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).
2. (a) Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

   (b) Calculer S_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.
Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.