# TS : devoir sur feuille n° 2

## I Fonction d'Ackermann

Cette fonction $A$ est une fonction de deux entiers naturels, définie ainsi :

- $A(0\,;\,n) = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $A(m+1\,;\,0) = A(m\,;\,1)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$
- $A(m+1\,;\,n+1) = A(m\,;\,A(m+1\,;\,n))$ pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

(a) Calculer $A(0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1)$ et $A(1\,;\,0)$.

(b) Calculer $A(m\,;\,n)$ pour $m \leqslant 3$ et $n \leqslant 5$.
On présentera les résultats dans un tableau.

(c) Émettre des conjectures sur les expression de $A(1\,;\,n)$ et de $A(2\,;\,n)$ en fonction de $n$ et les démontrer.

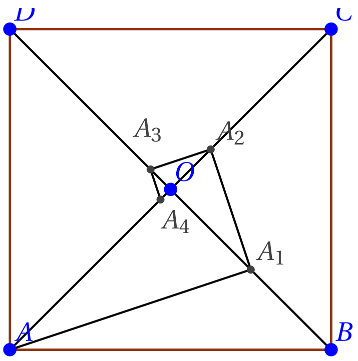
(d) Démontrer que $A(3\,;\,n) = 2^{n+3} - 3$ pour tout $n \geqslant 0$.

## II Spirales

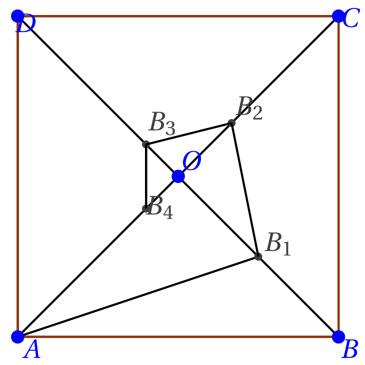
$ABCD$ est un carré de centre $O$ dont les diagonales ont pour longueur 2.

On construit les deux spirales suivantes dont les sommets appartiennent aux diagonales du carré.

**Spirale géométrique** : les distances de $O$ aux sommets successifs $A_0 = A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc. valent 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc.




**Spirale harmonique** : Les distances de $O$ aux sommets $B_0 = A$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, etc sont 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.




On note $L_n$ la longueur de la spirale $A_0A_1A_2\cdots A_n$ et $L'_n$ la longueur de la spirale $B_0B_1B_2\cdots B_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Spirale géométrique :
   Exprimer $OA_n$ puis $A_nA_{n+1}$ en fonction de $n$. En déduire $L_n$ en fonction de $n$ puis la limite de $(L_n)$.
2. **Spirale harmonique** :
   Exprimer $OB_n$ en fonction de $n$ puis $B_nB_{n+1}$ en fonction de $n$. Conjecturer le comportement asymptotique de $L'_n$ (le comportement quand $n$ tend vers $+\infty$).
3. (a) Montrer que $B_nB_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$."
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $L'_n \geqslant h_n$ où $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$.

   (b) Exprimer $h_{2n} - h_n$. Quel est le plus petit terme de cette somme ?
   En déduire que $h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}$.

   (c) En déduire que $h_{2^n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}(n-1)$.

   (d) Montrer que la suite $(h_n)$ n'est pas majorée. En déduire sa limite et celle de $\left(L'_n\right)$.

## III

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.* Justifier chaque réponse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A$(1\,;\,-1\,;\,2)$, B$(3\,;\,3\,;\,8)$, C$(-3\,;\,5\,;\,4)$ et D$(1;2;3)$.
On note $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+1 \\ y &=& 2t-1 \\ z &=& 3t+2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

et $\mathscr{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& k+1 \\ y &=& k+3 \\ z &=& -k+4 \end{array}\right., k \in \mathbb{R}$.

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$.

**Question 1 :**
Proposition **a.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
Proposition **b.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.
Proposition **c.** Le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition **d.** Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

**Question 2 :**
Proposition **a.** Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition **b.** Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
Proposition **c.** Le plan $\mathscr{P}$ contient la droite $\mathscr{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathscr{D}'$.
Proposition **d.** Le plan $\mathscr{P}$ contient les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

**Question 3 :**
Proposition **a.** Les points A, D et C sont alignés.
Proposition **b.** Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition **c.** Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition **d.** Le point D est le milieu du segment [AB].

**Question 4 :**
On note $\mathscr{P}'$ le plan contenant la droite $\mathscr{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :
Proposition **a.** $\overrightarrow{n}(-1\ ;\ 5\ ;\ 4)$
Proposition **b.** $\overrightarrow{n}(3\ ;\ -1\ ;\ 2)$
Proposition **c.** $\overrightarrow{n}(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$
Proposition **d.** $\overrightarrow{n}(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$

## IV

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :
$A(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ -6\ ;\ -1)$ et $C(2 ; 2 ; 2)$.

1. (a) Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
   (b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit $P$ le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.
   (a) Montrer que les plans (ABC) et $P$ sont sécants.
   (b) Soit $D$ la droite intersection des plans $P$ et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite $D$.
3. On considère la sphère $S$ de centre $\Omega(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$. On admet que la droite $D$ a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1+t \\ y &=& -3+2t \\ z &=& t, \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Montrer que le point I appartient à la droite $D$.
   (b) Montrer que le point I appartient à la sphère $S$.
   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que la droite $D$ coupe la sphère $S$ en un deuxième point.