DM faculatatif à faire pour le 2 mai

Exercice 1

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x_0 & = & -3 \\ y_0 & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} & = & 0,6x_n + 0,8y_n \end{array}\right.$$

1. (a) Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

   (b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

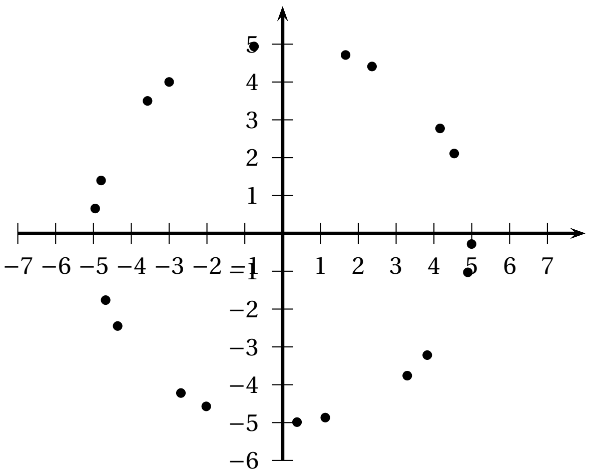
```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
        Construire le point de coordonnées
(x ; y)
        t prend la valeur x
        x prend la valeur ....
        y prend la valeur ....
Fin Pour
```

   Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

   (c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



   Identifier les points A_0, A_1 et A_2.. On les nommera sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.

   Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

   Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point A_n.

   (a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

   (b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.

   Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

   (d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

   (e) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.

   Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie).**

   Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

Exercice 2

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   (b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :

   (a) $\mathrm{j}^3 = 1$;

   (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

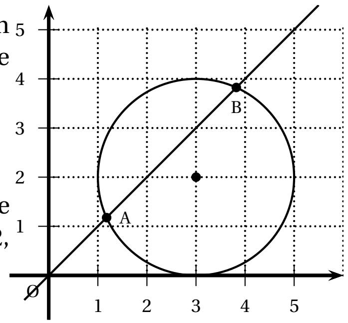
Exercice 3

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées (3 ; 2) et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.



Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].

2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un réel.

Pour les questions 3 et 4, on considère les points E (2 ; 1 ; - 3), F (1 ; -1 ; 2) *et* G (-1 ; 3 ; 1) *dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.*

3. Affirmation 3 : une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2t \\ y &=& -3+4t \\ z &=& 7-10t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

4. Affirmation 4 : une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\text{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.

Exercice 4

Les trois questions sont indépendantes.

Toute réponse doit être justifiée.

1. On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1.$$

La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2. Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 - \ln(v_n)$.
La proposition $(\mathscr{P})$ suivante est-elle vraie ou fausse ?

$(\mathscr{P})$: si la suite (v_n) est majorée alors la suite (w_n) est majorée.

3. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par

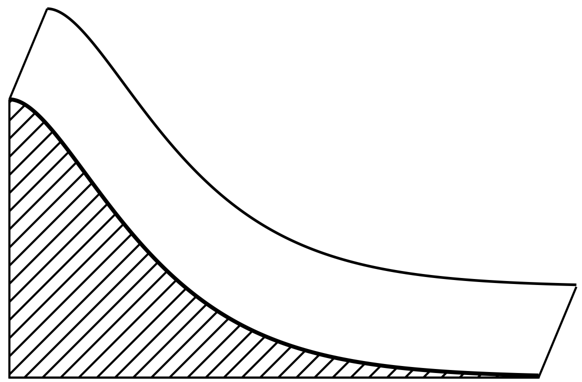
$$z_0 = 2+3\mathrm{i} \text{ et, } \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ par } z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n.$$

Pour quelles valeurs de n, $|z_n|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-20} ?

Exercice 5

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :

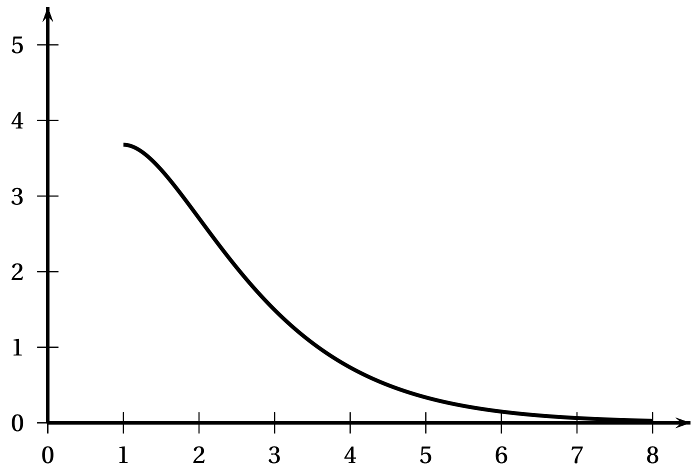


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 8]$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
   Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
   Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1 ; 8]$ par

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur $[1 ; 8]$ par

$$g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

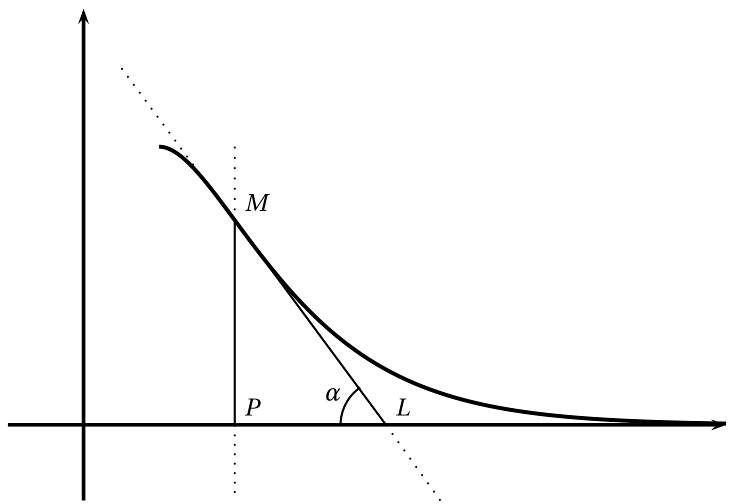
   Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.
2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1 ; 8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $]1 ; 8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$.
   Justifier que $\tan\alpha = \left|f'(x)\right|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Exercice 6

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5),
B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\,;\,-1\,;\,5)$ et $N_t(11\,;\,0{,}8t\,;\,1+0{,}6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. (a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   (b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).
   Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   (c) Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point E(11 ; −1 ; 5).
   (d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. (a) Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$.
   (b) À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Exercice 7

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \mathrm{i}$.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ,
   $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. Conjecturer :
   (a) les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
   (b) la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;
   (c) la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.
2. Justifier que $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. (a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
   $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.
   (b) Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.
   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.
5. On admet que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$

   est une primitive de la fonction h.
   On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_{\{}$ et $\mathscr{C}_{\}}$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

Exercice 8

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ». Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

Exercice 9

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^{a}.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

Exercice 10

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

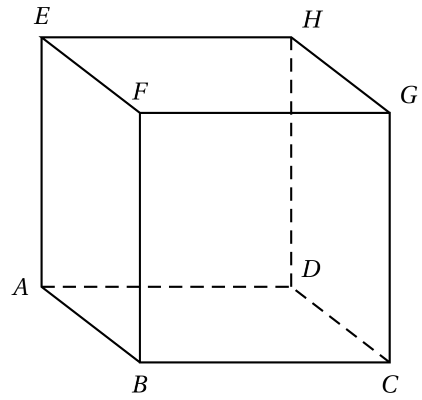
$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Partie A

L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. (a) Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).
   (b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
   (c) Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
2. Le triangle BDE est-il équilatéral ?
3. Soit M un point de l'espace.
   (a) Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.
   (b) En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geqslant AK^2$.
   (c) Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.