

Probabilités sur un ensemble fini

Table des matières

I	Petits rappels sur le vocabulaire des ensembles	2
I.1	Définitions	2
I.2	Propriétés	2
II	Le vocabulaire des événements	3
II.1	Les événements	3
II.2	Événements incompatibles	3
II.3	Événements contraires	3
III	Calcul de probabilités	4
III.1	Définition	4
III.2	Loi des grands nombres	4
III.3	Loi équirépartie, équiprobabilité	4
III.4	Propriétés	5
III.5	Exemples	5
III.6	Utilisation d'un arbre	5
IV	Variable aléatoire	6
IV.1	Définition	6
IV.2	Espérance, variance et écart-type	7
V	Probabilités conditionnelles, événements indépendants	7
V.1	Exemple	7
V.2	Exemple	8
V.3	Conditionnement par un événement	9
V.4	Événements indépendants	9
V.5	Formule des probabilités totales	10
VI	Loi binomiale	11
VI.1	Schéma de Bernoulli	11
VI.2	Coefficients binomiaux	11
VI.3	Loi binomiale	14

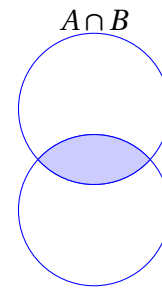
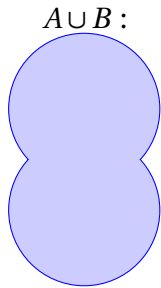
I Petits rappels sur le vocabulaire des ensembles

I.1 Définitions

Soient A et B deux ensembles.

$A \cup B$ est la réunion de A et de B : c'est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B (ou aux deux).

$A \cap B$ est l'intersubsection de A et de B : c'est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B . $A \in B$ se lit : A est inclus dans B ; c'est le cas si tous les éléments de A sont dans B .



Remarque : $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble (donc $A \in E$). on note \bar{A} le complémentaire de A dans E ; \bar{A} est formé de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A .

I.2 Propriétés



Soient A, B, C trois ensembles :

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- Si $A \subset B$, $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

II Le vocabulaire des événements

II.1 Les événements

Définition

On effectue une **expérience aléatoire** (c'est-à-dire une expérience dont on ne peut prévoir le résultat) conduisant à n **éventualités** ou **issues** : $e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_n$.

L'ensemble de toutes les éventualités de l'expérience aléatoire est l'**univers**, noté généralement $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_i; \dots, e_n\}$.

Toute partie de l'univers est un **événement**.

Un événement qui ne contient qu'une seule éventualité est un **événement élémentaire**.

Ω est l'**événement certain** ;

\emptyset est l'**événement impossible**.

Exemples :

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure. Le résultat est alors « Pile » ou « Face » .
On prend alors comme modèle : $\Omega = \{P ; F\}$
- On lance une fois un dé.
L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
1 est une éventualité.
Obtenir un nombre pair est l'événement : $\{2; 4; 6\}$.
Obtenir 6 est un événement élémentaire.
- On lance deux dés rouge et vert ; on note en premier le résultat du dé rouge et ensuite, le résultats du dé vert :
 $\Omega = \{(1 ; 1) ; (1 ; 2) ; (1 ; 3) ; \dots (1 ; 6) ; (2 ; 1) ; (2 ; 2) \dots (6 ; 6)\}$
 Ω comprend 36 éléments : $\text{Card}(\Omega) = 36$
- En supposant que le sexe d'un bébé survient au hasard, quelles sont les possibilités pour les sexes des enfants des familles de deux enfants :
 $\Omega = \{GG ; FG ; GF ; FF\}$

II.2 Événements incompatibles

Définition

Deux événements qui n'ont aucune éventualité commune sont dits **incompatibles** ou **disjoints**.

Exemple : On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.

Les événements « tirer un roi » et « tirer un sept » sont incompatibles.

Par contre, les événements « tirer un roi » et « tirer une carte de coeur » ne sont pas incompatibles : ils ont l'éventualité « roi de coeur » en commun.

II.3 Événements contraires

Définition

Si A est un événement de l'univers Ω , l'événement constitué de toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A est appelé l'**événement contraire de A**, et il est noté \bar{A} .

Exemple : Quand on lance une fois un dé, l'événement « obtenir un nombre pair » est le contraire de l'événement « obtenir un nombre impair ».

III Calcul de probabilités

III.1 Définition

Définition

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_i; \dots, e_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.

À chaque événement élémentaire $\{e_i\}$, on associe un nombre réel p_i de $[0; 1]$, appelé **probabilité** de cet événement élémentaire $\{e_i\}$, $p_i = P(e_i)$ tel que :

- $0 \leq p_i \leq 1$,
- la somme de ces nombres est : $p_1 + p_2 + \dots + p_i + \dots + p_n = 1$

III.2 Loi des grands nombres

On répète un grand nombre de fois. une expérience aléatoire identique ayant n issues possibles :

e_1, e_2, \dots, e_n .

On note $f_n(k)$ la fréquence d'apparition de l'événement e_k . On définit une loi de probabilité sur Ω : on note $p(k)$ la probabilité de e_k .

On a un modèle cohérent si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(k) = p(k)$.

III.3 Loi équirépartie, équiprobabilité

Définition

- Si tous les événements élémentaires $e_1; e_2; \dots; e_i; \dots; e_n$ ont la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables**. Alors : $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$.
- S'il y a équiprobabilité, alors pour tout événement A ,

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemples :

1. On lance une pièce équilibrée. Les événements : tomber sur pile et tomber sur face sont équiprobables ; ils ont chacun une probabilité de $\frac{1}{2}$.
2. On lance un dé à six faces équilibré. Les événements : obtenir un 1 ; obtenir un 2 ; \dots ; obtenir un 6 sont équiprobables. Ils ont chacun une probabilité de $\frac{1}{6}$.
3. Si l'on reprend l'exemple du dé non pipé. On considère l'événement A : obtenir un nombre pair. Alors $A = \{2; 4; 6\}$. Chaque événement étant équiprobable, $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

III.4 Propriétés

Parties de Ω	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A événement quelconque $A \subset \Omega$	$0 \leq P(A) \leq 1$
\emptyset	événement impossible	$P(\emptyset) = 0$
Ω	événement certain	$P(\Omega) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
\overline{A}	événement contraire de A	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
A, B	A et B événements quelconques	$P(A \cup B)$ $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Remarque : $p(\emptyset) = 0$, mais $p(A) = 0$ n'implique pas que $A = \emptyset$, **sauf pour un ensemble fini**.

En cas d'équiprobabilité avec un univers **fini**, on a : $p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$, donc $p(A) = 0 \Rightarrow \text{Card}(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$.

III.5 Exemples

- On considère un jeu de 32 cartes. A est l'événement : « tirer une carte de pique » ; B est l'événement : « tirer un valet ».

Il y a huit cartes de pique dans le jeu, donc, les événements étant équiprobables, $p(A) = \frac{8}{32}$.

Il y a quatre valets dans le jeu. Les événements étant équiprobables, $p(B) = \frac{4}{32}$.

L'événement $A \cap B$ est : « tirer un valet de pique ». Sa probabilité est donc $\frac{1}{32}$.

Alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

- Dans le jeu de trente-deux cartes, l'événement : « obtenir une carte de coeur, carreau ou trèfle » est l'événement contraire de l'événement A : « obtenir une carte de pique ».

Donc $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{8}{32} = \frac{32}{32} - \frac{8}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$.

- On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note la face obtenue à chaque fois.

$\Omega = \{PPP; FPP; PFP; PPF; FFP; FPF; PFF; FFF\}$

$A = \{PPP; FFF\}$ est un événement.

Les événements élémentaires sont : $\{PPP\}; \{FPP\}; \{PFP\}$

$\{PPF\}; \{FFP\}; \{FPF\}; \{PFF\}; \{FFF\}$

Si $B = \{PPF; PFP; FFP\}$ alors $A \cap B = \emptyset$ ou A et B sont **incompatibles**

$\overline{A} = \{FPP; PFP; FPF; FFF\}$

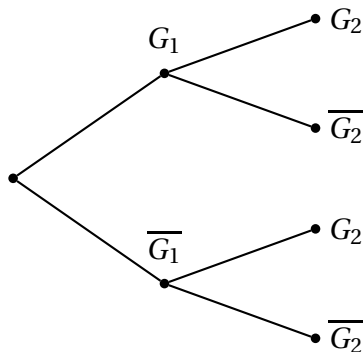
III.6 Utilisation d'un arbre

Exemple 1 : on suppose que la probabilité pour une famille quelconque d'avoir une fille est la même que celle d'avoir un garçon.

On s'intéresse aux familles de deux enfants ; quelle est la probabilité d'avoir deux enfants de sexes différents ? Le plus simple est de faire un arbre. On note G_1 l'événement « avoir un garçon la première fois » et donc $\overline{G_1}$ l'événement « avoir une fille » la première fois.

On note G_2 l'événement « avoir un garçon lors de la deuxième naissance ».

L'arbre est alors :



Exemple 2

On lance trois fois une pièce de monnaie, parfaitement équilibrée. On veut savoir la probabilité d'avoir exactement deux Pile et une Face, dans n'importe quel ordre.

On fait un arbre et on compte le nombre final de sous-branches : il y en a 8, dont trois sont favorables à l'événement considéré : la probabilité cherchée est donc $\frac{3}{8}$.

IV Variable aléatoire

IV.1 Définition



On se place dans l'ensemble Ω , muni de la probabilité P .

Une **variable aléatoire** X est une application définie sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R} . Sa valeur dépend de l'issue de l'expérience aléatoire.

Exemple : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 euros pour chaque résultat « pile », et on perd 1 euro pour chaque « face ».

L'ensemble des issues est : $\Omega = \{PP; FP; PF; FF\}$. Il y a équiprobabilité puisque la pièce est équilibrée.

Soit X l'application définie sur Ω qui à chaque issue associe le gain correspondant. Donc X prend les valeurs : 4 ; 1 ou -2. X est une variable aléatoire.

Pour chaque valeur possible (par exemple 1), on peut considérer l'événement $(X = 1) = \{PF; FP\}$ et lui associer sa probabilité. On obtient alors une loi de probabilité sur l'ensemble des gains : Les valeurs possibles sont : $\{4 ; 1 ; -2\}$.

Cette loi est appelée **loi de** X et est notée P_X .

gain x_i	$x_1 = -2$	$x_2 = 1$	$x_3 = 4$
probabilité $p_i = P(X = x_i)$	0.25	0.5	0.25

Exercice : Une urne contient 2 boules bleues, trois vertes et une jaune. On prend au hasard trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de couleurs présentes parmi les trois boules.

Quelles sont les valeurs prises par X ?

Quelle est la loi de probabilité de X ?

IV.2 Espérance, variance et écart-type

Soit $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ muni d'une probabilité P telle que $P(\{x_i\}) = p_i$.



Définition

On appelle :

- **espérance** de la loi P le nombre : $\mu = \sum_{i=1}^n p_i x_i$;
- **variance** de la loi P le nombre : $V = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2$;
- **écart-type** de la loi P le nombre : $\sigma = \sqrt{V}$.

Remarque : l'espérance correspond à la notion de moyenne.

V Probabilités conditionnelles, événements indépendants

V.1 Exemple

Le nombre d'élèves inscrits dans un lycée est donné dans le tableau ci-dessous.

	Seconde	Première	Terminale
Filles	76	38	53
Garçons	46	44	37

On choisit un élève au hasard. l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des 285 élèves du lycée.

On considère les événements suivants :

- S : « l'élève est en classe de Seconde ».
- P : « l'élève est en classe de Première ».
- S : « l'élève est en classe de seconde ».
- F : « l'élève est une fille ».
- G : « l'élève est un garçon ».

1. Donner les probabilités des événements S, P, T, F et G.

2. (a) On choisit au hasard un garçon de ce lycée. Quelle est la probabilité que ce soit un élève de Terminale. C'est la probabilité de choisir un élève de Terminale, **sachant qu'il s'agit d'un garçon**.

Elle est appelée probabilité conditionnelle de l'événement T sachant que l'événement G est réalisé. Elle se note $p_G(T)$ et se lit « **probabilité de T sachant G** ».

(b) Sur quelle partie du tableau des données travaille-t-on lorsque l'on sait que G est vérifié?

Calculer ainsi $p_G(S)$ et $p_G(P)$.

(c) Calculer $p(T \cup G)$.

(d) Exprimer $p_G(T)$ en fonction de $p(G)$ et $p(T \cup G)$.

3. (a) Que représente la probabilité conditionnelle $p_S(F)$?

(b) Calculer ce nombre.

(c) Observe-t-on le même type de résultat que pour la question 2 (d).

V.2 Exemple

On fait tourner deux roues circulaires bien équilibrées. L'une est bleue et l'autre est rouge. Chacune est formée de trois secteurs identiques, numérotés 1, 2 et 3.

On forme ainsi un nombre à deux chiffres : la roue bleue donne le chiffre des dizaines et la roue rouge donne le chiffre des unités.

L'univers est constitué de neuf résultats : $\Omega = \{11; 12; 13; 21; 22; 23; 31; 32; 33\}$.

La loi est équirépartie sur Ω .

1. **Règle du jeu n° 1** : le joueur est gagnant si le résultat obtenu est un multiple de 11.

(a) $p(G) = p(\{11; 22; 33\}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

- (b) La roue bleue est arrêtée sur le secteur 1, alors que la roue rouge tourne encore. Le nouvel univers est alors $\Omega' = \{11; 12; 13\}$. On a une loi équirépartie sur ce nouvel univers Ω' .

La probabilité que le joueur gagne, sachant que la roue bleue est arrêtée sur le secteur 1, est $p'(G) = \frac{1}{3}$.

La probabilité de gagner n'a pas changé.

On dit que les événements « La roue bleue est arrêtée sur le secteur 1 » et « Le joueur est gagnant » sont **indépendants**.

2. **Règle du jeu n° 2** : le joueur gagne si la somme des chiffres obtenus est au moins égale à 5.

S est la variable aléatoire égale à la somme des chiffres obtenus.

S , variable aléatoire, est une fonction de Ω dans \mathbb{N} .

S peut prendre les valeurs 2, 3, 4, 5 ou 6.

- (a) La loi de probabilité de S est :

s_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Alors : $p(G) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

- (b) La roue bleue s'est arrêtée sur le secteur 3 alors que la roue rouge tourne encore. Le nouvel univers Ω'' est $\Omega'' = \{31; 32; 33\}$.

La loi de S est :

s_i	4	5	6
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

donc $p'(S \geq 5) = \frac{2}{3}$.

La probabilité que le joueur gagne sachant que la roue bleue est arrêtée sur le 3 est $\frac{2}{3}$. Cette probabilité est **différente** de la précédente.

Les événements « La roue bleue est arrêtée sur 3 » et « Le joueur est gagnant » **ne sont pas indépendants**.

V.3 Conditionnement par un événement

Définition

Soit p une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement tel que $p(A) \neq 0$. Pour tout événement B , on appelle probabilité de B sachant A le réel noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Conséquences :

- $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$
- $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ donc $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.
- On en déduit : $p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$

Exemple : On lance successivement deux fois un dé tétraédrique équilibré (non truqué) numéroté de 1 à 4. On note les résultats dans l'ordre. Par exemple : (4; 1).

L'univers Ω est l'ensemble de tous les couples possibles. $\Omega = \{(i; j), i \in \{1; 2; 3; 4\}, j \in \{1; 2; 3; 4\}\}$.

Comme le dé est équilibré, on a une loi équirépartie : tous les résultats sont équiprobables. Chaque couple a une probabilité de $\frac{1}{16}$ d'apparaître.

Soient les événements suivants :

A : « Le premier tirage a donné 3 ».

B : « La somme des deux résultats est supérieure ou égale à 7. »

On a : $p(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; $p(A \cap B) = \frac{1}{16}$.

Alors : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$ (probabilité d'avoir une somme supérieure ou égale à 7 sachant que le premier nombre est 3.)

Remarques :

- $p_A(A) = \frac{p(A \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$ (l'événement A sachant A est certain).
- Si A et B sont incompatibles, $p_A(B) = 0$; en effet : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0}{p(A)} = 0$.
- $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$.
- $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(B)$.

Exemple : Au jeu, l'objectif d'un tricheur est d'obtenir un conditionnement ; par exemple, au poker, sachant qu'il a vu l'as de trèfle dans la main de son voisin de gauche, la probabilité que le voisin de droite ait un carré d'as est nulle.

V.4 Événements indépendants

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exercice (à savoir faire) :

Montrer que si A et B sont indépendants, \bar{A} et \bar{B} le sont aussi, de même que A et \bar{B} ou \bar{A} et B .

Montrons l'indépendance de \bar{A} et \bar{B} :

Par hypothèse, A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

Alors : $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = 1 - p(A) - p(B) + p(A)p(B)$
 $= (1 - p(A)) \times (1 - p(B)) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B})$ donc \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.



Propriété

Soient A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$.

A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$.

Démonstration :

On a : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ et $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ d'où : $p(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$ soit $p(B) = p_A(B)$ en divisant par $p(A)$.

Remarque : Si A et B sont de probabilité non nulle, leur indépendance signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.

V.5 Formule des probabilités totales



Définition

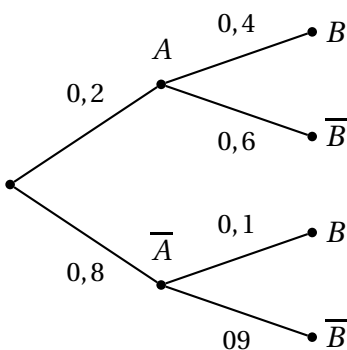
Partition de A :

Deux sous-ensembles A_1 et A_2 non vides de A forment une partition de celui-ci si $A = A_1 \cup A_2$ et si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Formule : on a alors : $A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2)$ (réunion d'événements disjoints) et

$$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) = p_{A_1}(A)p(A_1) + p_{A_2}(A)p(A_2)$$

Interprétation sur un arbre :



En fait, en bout d'arbre, quand on écrit B , on devrait écrire $A \cap B$ ou $\bar{A} \cap B$.

On a : $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ qui est une réunion d'événements incompatibles.

$$\text{Donc : } p(B) = p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) \\ = p_A(B)p(A) + p_{\bar{A}}(B)p(\bar{A}) = 0,4 \times 0,2 + 0,1 \times 0,8 = 0,16$$

VI Loi binomiale

VI.1 Schéma de Bernoulli



Définition

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues, appelées en général succès et échec.

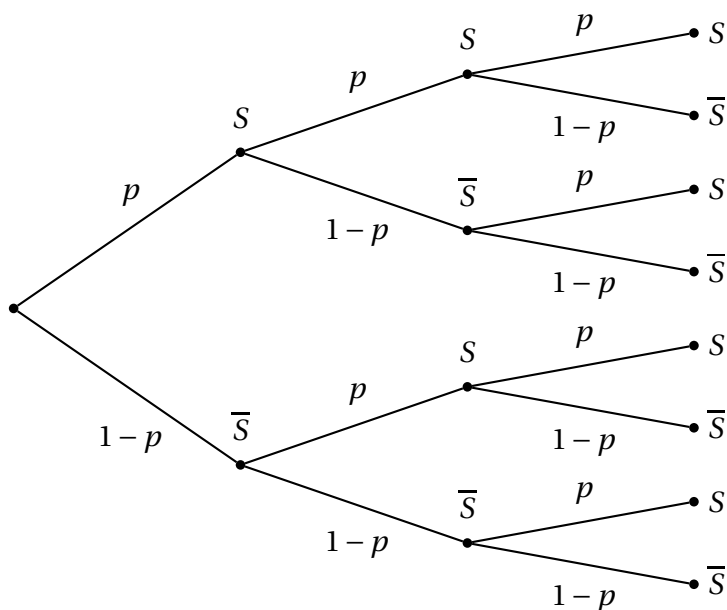
Si p est la probabilité d'un succès, la probabilité d'un échec est $q = 1 - p$.

On appelle schéma de Bernoulli une répétition de n fois la même épreuve de Bernoulli, les épreuves successives étant indépendantes.

Les paramètres sont n (nombre d'épreuves) et p , probabilité d'un succès

On peut représenter la situation par un arbre pondéré.

Exemple avec trois épreuves :



On a par exemple : $p(S \cap \bar{S} \cap S) = p(1-p)p = p^2(1-p)$

VI.2 Coefficients binomiaux



Propriété

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

On appelle coefficient binomial $\binom{n}{k}$, ou combinaison de k parmi n , le nombre de chemins conduisant à k succès sur l'arbre représentant n expériences successives.

Remarque : $\binom{n}{k}$ compte le nombre de positions possibles des k succès parmi les n positions possibles de S et \bar{S} .



Propriété

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$.

Alors :

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Justification :

- $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant 0 succès.
- $\binom{n}{n} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant n succès.
- $\binom{n}{1} = n$ car il y a n chemins réalisant 1 succès, correspondant aux n emplacements possibles de ce succès.
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ car compter le nombre de chemins menant à $n-k$ succès revient à compter le nombre de chemins menant à k échecs.

Remarque : On peut calculer les coefficients binomiaux essentiellement de deux façons différentes :

- à l'aide de la calculatrice.
- à l'aide du triangle de Pascal (voir ci-dessous)
- avec la formule directe (hors-programme) : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$ où $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ (se lit « factorielle n »)



Propriété

Soit un schéma de Bernoulli correspondant à des paramètres n et p .

Pour $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration :

Les chemins comportant $n+1$ succès parmi les $n+1$ épreuves au nombre de $\binom{n+1}{k+1}$, sont de deux sortes :

- ceux commençant par un échec : il y en a $\binom{n}{k+1}$ (car les $k+1$ succès sont dans les n épreuves autres que la première)
- ceux commençant par un succès : il y en a $\binom{n}{k}$ car ayant commencé par un succès, il n'en reste plus que k à chercher parmi les n épreuves autres que la première.

On peut alors calculer les coefficients binomiaux de proche en proche, par exemple avec le triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

10 s'obtient en calculant 4 + 6.

VI.3 Loi binomiale

Définition

Soit une expérience aléatoire associée à un schéma de Bernoulli.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n; p)$.

Propriété

Soit X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. (on peut écrire $X \leftrightarrow \mathcal{B}(n; p)$)

Pour tout $k \leq n$, $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Chaque chemin, comportant k succès et donc $n - k$ échecs, a une probabilité égale à $p^k (1-p)^{n-k}$.

Il y a $\binom{n}{k}$ tels chemins d'où le résultat.

Propriétés (admises)

- $E(X) = np$ (espérance)
- $V(X) = npq$ (variance) où $q = 1 - p$
- $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ (écart-type).