Géométrie dans l'espace : exercices de bac

I Liban mai 2014

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+3z+1=0$ et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5+3t \end{cases}$$

On donne les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;1\ ;\ -2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2+t \end{cases}$

Proposition 2 :

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :

Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :

La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées $(8;\ -3;\ -4)$.

Proposition 5 :

Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

II Métropole, juin 2014

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).
   (a) Donner les coordonnées des points D et F.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
   (d) Calculer les coordonnées du point H.
   (e) Démontrer que l'angle $\widehat{\mathrm{EHG}}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = t\overrightarrow{\mathrm{DF}}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{E}M\mathrm{G}}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   (a) Démontrer que $M\mathrm{E}^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   (b) Démontrer que le triangle $M\mathrm{EG}$ est isocèle en M.
   En déduire que $M\mathrm{E}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   (c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si et seulement si $M\mathrm{E}^2$ est minimal.
   (d) Conclure.

Correction

I Liban mai 2014

Proposition 1 : VRAIE

Il suffit de vérifier que les coordonnées des deux points A et B vérifient le système formé des trois équations paramétriques.

Pour $t = 2$ on retrouve les coordonnées du point A, et pour $t = 1$ celles du point B.

Proposition 2 : VRAIE

$\mathscr{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{d}$ de coordonnées $(2,\ 1,\ 3)$ et (AB) par $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2,\ 1,\ 1)$.

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{d} = -4 + 1 + 3 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{d}$ sont donc orthogonaux, les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont donc orthogonales.

Proposition 3 : FAUSSE

Pour savoir si ces deux droites sont coplanaires, il suffit de savoir si elles sont sécantes, car étant orthogonales elles ne pourront pas être parallèles.

Pour cela on résout le système

$$\begin{cases} 2t & = 5 - 2t' \qquad (1) \\ 1 + t & = -1 + t' \qquad (2) \\ -5 + 3t & = -2 + t' \qquad (3) \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre (3) et (2), il vient $2t - 6 = -1$ soit $t = \dfrac{5}{2}$.

On remplace dans (2) : $t' = -2 + t = -2 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$.

On vérifie dans (1) : $2t = 5$, alors que $5 - 2t' = 5 - 1 = 4$. Ce qui signifie que ce système n'a pas de solution.

Puisque ces deux droites sont orthogonales et non sécantes, elles seront donc non coplanaires.

Proposition 4 : FAUSSE

On vérifie facilement que $E \in \mathscr{P}$, mais $E \notin \mathscr{D}$.

En effet, si on résout le système

$$\begin{cases} 8 = 2t \\ -3 = 1 + t \\ -4 = -5 + 3t \end{cases}$$

On trouve que $t = 4$ dans la première équation, valeur qui ne convient pas dans la seconde équation.

Proposition 5 : VRAIE

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(2,\ -1,\ -1)$ et $(6,\ 0,\ -2)$, d'où

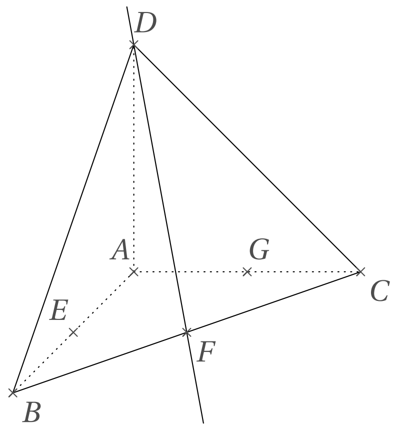
$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 1 - 3 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 + 0 - 6 = 0$$

$\overrightarrow{n}$ est donc normal au plan (ABC).

$\mathscr{P}$ et (ABC) ayant un vecteur normal commun sont donc parallèles.

II Métropole, juin 2014

Tout d'abord, une figure :



1. (a) Commençons par des coordonnées "évidentes", puisque liées au repère : $A(0\,;\,0\,;\,0)$; $B(1\,;\,0\,;\,0)$; $C(0\,;\,1\,;$ et $D(0\,;\,0\,;\,1)$.
Puisque F est le milieu de $[BC]$, on en déduit que ses coordonnées sont la moyenne de celles des points B et C, donc $F\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$.

   (b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DF}$ sont donc : $\overrightarrow{DF}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,-1\right)$.
Si on appelle M_t le point de paramètre t sur la droite (DF), défini tel que $\overrightarrow{DM_t} = t\overrightarrow{DF}$, alors la représentation paramétrique de la droite (DF) est donnée par : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2}t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$.

   (c) Puisque le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à (DF), alors un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est le vecteur $2\overrightarrow{DF}$, de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,-2)$. Une équation cartésienne du plan sera alors de la forme $x + y - 2z + d = 0$, où d est un nombre réel. Comme ledit plan doit contenir le point A, le réel d doit être choisi de sorte que les coordonnées de A vérifient l'équation, donc :
$0 + 0 - 2 \times 0 + d = 0$, ce qui donne $d = 0$.
Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donc : $x + y - 2z = 0$.

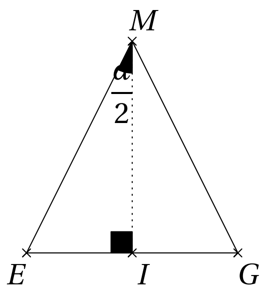
   (d) Le point H est un point de (DF), mais c'est aussi un point de $\mathscr{P}$, donc ses coordonnées sont celles d'un point de paramètre t dans la représentation paramétrique, qui vérifie également l'équation du plan :
$$\begin{aligned} M_t \in \mathscr{P} &\iff \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t - 2(1-t) = 0 \\ &\iff 3t - 2 = 0 \\ &\iff t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$
Le point de paramètre t sur la droite (DF) est sur le plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le paramètre t est $\dfrac{2}{3}$, ce qui nous indique que le point H est le point de coordonnées : $\left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3}\,;\,1 - \dfrac{2}{3}\right)$, c'est à dire : $H\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$

(e) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$:
$\overrightarrow{HE} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ ;\ 0 - \frac{1}{3}\ ;\ 0 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{6}\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\right)$
$\overrightarrow{HG} = \left(0 - \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ ;\ 0 - \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ -\frac{1}{3}\right)$.
Comme on travaille avec un repère orthonormé, le produit scalaire des deux vecteurs peut être obtenu avec ces coordonnées, et on a :
$\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HG} = \frac{1}{6} \times \frac{-1}{3} + \frac{-1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{-1}{3} \times \frac{-1}{3} = \frac{-1}{18} + \frac{-1}{18} + \frac{1}{9} = 0.$
Comme le produit scalaire des deux vecteurs est nul, ceux ci sont orthogonaux, et donc l'angle $\widehat{EHG}$ est bien droit.

2. On reconnaît dans le point M décrit, le point de paramètre t dans la représentation paramétrique de la droite (DF) donnée à la question **1. b.**.

(a) Le point E est le milieu du segment $[AB]$, donc ses coordonnées sont $E\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ donc le vecteur $\overrightarrow{ME}$ a pour coordonnées :
$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\ ;\ 0 - \frac{1}{2}t\ ;\ 0 - (1-t)\right)$, soit $\overrightarrow{ME}\left(\frac{1}{2}(1-t)\ ;\ -\frac{1}{2}t\ ;\ t-1\right)$.
On a donc $ME^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{ME} = \left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}t\right)^2 + \left(t-1\right)^2$
$ME^2 = \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1) + \frac{t^2}{4} + t^2 - 2t + 1 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$
On a bien prouvé $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$

(b) On procède de façon analogue pour calculer le carré de la distance MG : Le point G est le milieu du segment $[AC]$, donc ses coordonnées sont $E\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ donc le vecteur $\overrightarrow{MG}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{MG}\left(0 - \frac{1}{2}t\ ;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\ ;\ 0 - (1-t)\right)$, soit $\overrightarrow{MG}\left(-\frac{1}{2}t\ ;\ \frac{1}{2}(1-t)\ ;\ t-1\right)$.
On a donc $MG^2 = \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MG} = \left(-\frac{1}{2}t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2 + \left(t-1\right)^2$
$MG^2 = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}(t^2 - 2t + 1) + t^2 - 2t + 1 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$
On a bien prouvé $MG^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4} = ME^2$. Deux nombres ont le même carré quand ils sont égaux ou opposés, or ME et MG étant des distances, ils ne peuvent être opposés, donc $ME = MG$ et donc le triangle MEG est bien isocèle en M.
Visualisons la situation dans le plan (MEG) :



On nomme I le pied de la hauteur issue de M dans ce triangle. Le triangle étant isocèle en M, cette hauteur est aussi une bissectrice de l'angle $\widehat{EMG}$, donc on peut dire que dans le triangle EMI, rectangle en I, l'angle $\widehat{EMI}$ a donc une mesure égale à $\dfrac{\alpha}{2}$, et donc le sinus de cet angle est égal au quotient de la longueur du côté opposé à l'angle par celle de l'hypoténuse, soit : $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{IE}{ME}$, ce qui donne : $ME\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = IE$, or IE est la moitié de EG, puisque (IM), la hauteur issue du sommet principal d'un triangle isocèle est aussi la médiane issue de ce sommet, donc I est le milieu de $[EG]$.

La distance EG peut être calculée en utilisant les coordonnées de E et G, puisque le repère est orthonormé :

$EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2 + (z_G - z_E)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 0} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

La distance IE étant la moitié de cette distance EG, on arrive bien à l'égalité attendue : $ME\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) Puisque α désigne la mesure en radians d'un angle géométrique, on peut en déduire que cette mesure varie dans l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ et donc que le nombre $\dfrac{\alpha}{2}$ varie dans l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est strictement croissante, donc comme la fonction linéaire de coefficient $\dfrac{1}{2}$ l'est aussi, plus la mesure α est élevée, plus le nombre $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ l'est aussi.

La réciproque est vraie également : puisque la fonction est strictement croissante, plus l'image est élevée, plus l'antécédent l'est aussi.

On a donc prouvé que la valeur α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ l'est aussi.

Comme le produit de $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ par la distance ME est constant, et que les deux facteurs sont positifs, pour que l'un des facteurs soit maximal, il faut et il suffit que l'autre soit minimal, donc cela prouve $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal quand la distance ME est minimale.

Enfin, la distance ME étant nécessairement positive, et étant donné que la fonction carré est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on sait que ME est minimal si et seulement si ME^2 l'est aussi.

En conclusion, en utilisant ces différentes équivalences, on en déduit que la mesure α est maximale quand ME^2 est minimal.

(d) Le polynome de degré 2 qu'est $\dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$ a un coefficient dominant positif, donc son extremum sera un minimum, et celui ci sera atteint pour $t = \dfrac{-\dfrac{-5}{2}}{2\dfrac{3}{2}} = \dfrac{5}{6}$.

La position du point M telle que la mesure de l'angle soit maximale est celle atteinte pour le paramètre $t = \dfrac{5}{6}$, soit pour M de coordonnées : $M\left(\dfrac{5}{12}\,;\,\dfrac{5}{12}\,;\,\dfrac{1}{6}\right)$.

Ce qui suit est hors-sujet : On a alors $ME^2 = \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{5}{2} \times \dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{24}$.

On en déduit alors que $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{24}{5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$, ce qui, à l'aide de la calculatrice donne $\alpha \approx 1{,}7722$ soit un angle d'environ $101{,}5°$.