

Exercices sur la loi binomiale

I

Une compagnie bancaire propose des placements sous forme de produits financiers. La banque constate que le produit de type A a intéressé 10 % de sa clientèle, par le passé.

Un sondage est effectué auprès d'un échantillon de 10 clients.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de clients dans l'échantillon ayant choisi le produit A.

- Préciser la loi de probabilité de X . Justifier. Donner les valeurs de ses paramètres.
- Calculer la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins deux clients de l'échantillon aient choisi le produit A.
- Calculer la probabilité, arrondie au centième, que moins de cinq clients de l'échantillon aient choisi le produit A sachant que deux clients au moins en sont détenteurs.

II Sondages

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4.

Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

- On note :
 - A_1 l'événement « La personne est absente lors du premier appel » ;
 - R_1 l'événement « La personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Quelle est la probabilité de R_1 ?

- Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente et alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- A_2 l'événement « La personne est absente lors du second appel » ;
- R_2 l'événement « La personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;
- R l'événement « La personne accepte de répondre au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de R est 0,176 (on pourra utiliser un arbre).

- Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

- On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter.

Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

III Métropole juin 2011

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} .

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

\bar{V} et \bar{T} désignent respectivement les événements contraires de V et T .

- (a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\bar{V}}(\bar{T})$.

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

- En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

- Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

- (a) Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
(b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

- Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
- Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.