TS : fonction exponentielle : exercices de bac (2)

I Centres étrangers juin 2015

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

   (a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(2\mathrm{e}^x + 1\right)$.

   (b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

   (c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

   (b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

   (c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
   L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que … … … Fin tant que
Sortie	Afficher n

   (a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

II Polynésie juin 2014

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ

   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2.$$

   (a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

   (b) Justifier que, pour tout réel x,

   $$h(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right).$$

   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

   (c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   (e) En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

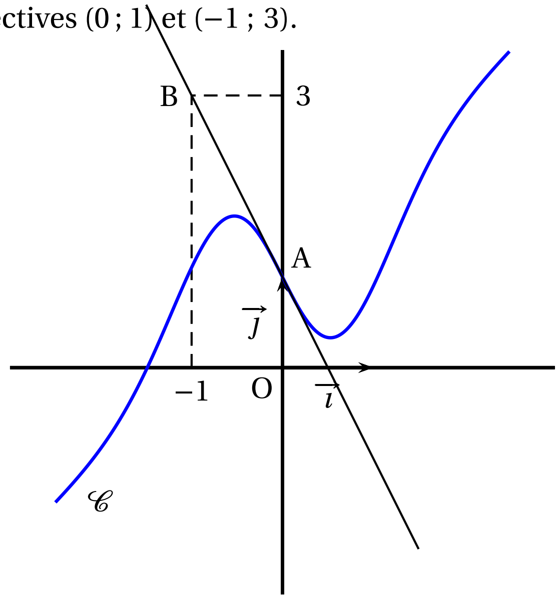
   (f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

   (a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

   (b) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

III Métropole septembre 2014

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(-1\,;\,3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + ax\mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. (a) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.

   (b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

   (c) Démontrer que pour tout réel x,

   $$f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

   (d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

   Déterminer la valeur du réel a.
2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

   $$f(x) = x+1-3x\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1+3\left(2x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

   (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;\,0]$, $f(x) > 0$.

   (b) Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

   (c) Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\,;\,-1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

   Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.