TS - probabilités conditionnelles- exercices de bac

I Asie juin 2010

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

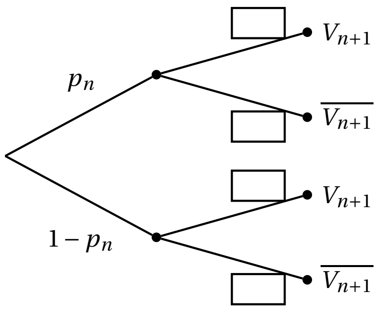
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A : « les 2[e] et 3[e] sondages sont positifs » ;
   (b) B : « les 2[e] et 3[e] sondages sont négatifs ».
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3[e] sondage soit positif.
3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
   (a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

II Polynésie septembre 2007

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :
40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.
On admet qu'au début de chaque année :

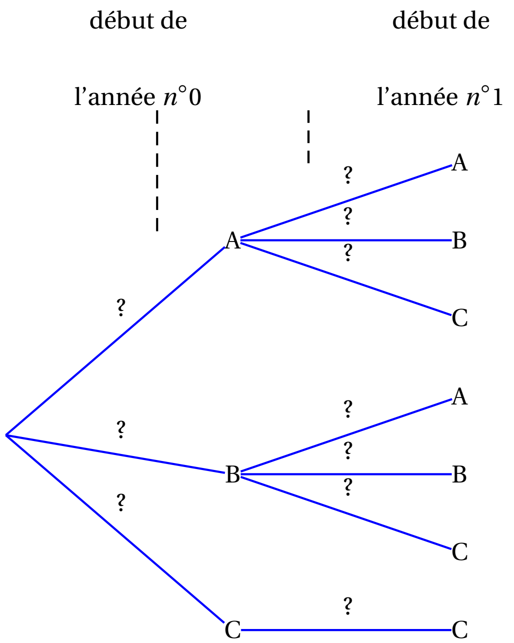
- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type B est $0,3$.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est $0,6$ et celle qu'elle le soit par une plante de type A est $0,3$.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'évènement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année $n°0$) on pose : $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaÁant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.
2. (a) Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$
3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.
   (a) Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison $0,3$.
   (b) Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).
   (c) En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter le résultat.



Correction

I Asie juin 2010

1. (a) A : D'après l'énoncé $p(V_2) = 0,6$ et $p_{V_2}(V_3 = 0,6$, donc $p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$.

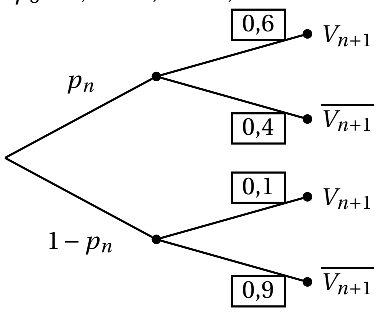
   (b) B : On a $p(V_2) = 0,6 \Rightarrow p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,9$.

   Donc $p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

2. On a $p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right)$.

   Or $p\left(V_3 \cap \overline{V_2}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$.

   Conclusion : $p_3 = 0,36 + 0,04 = 0,4$.

3. 

4. On a (ce que l'on peut voir sur l'arbre) :

   $p_{n+1} = p(V_{n+1}) = p(V_{n+1} \cap V_n) + p\left(V_{n+1} \cap \overline{V_n}\right) = p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,1 = 0,6p_n - 0,1p_n + 0,1 = 0,5p_n + 0,1$.

5. (a) Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,1) = 0,5u_n$.

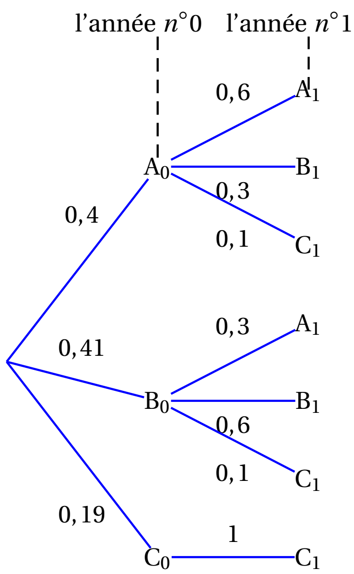
   Cette égalité montre que la suite u est une suite géométrique de raison 0,5 ; son premier terme est $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

   (b) On sait que pour tout entier naturel n non nul $u_n = u_1 \times r^{n-1} = 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{0,8}{2^{n-1}}$.

   De la définition de u_n il résulte que $p_n = 0,2 + \frac{0,8}{2^{n-1}}$.

   (c) On sait que $0 < \frac{1}{2} < 1$ entraîne que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{0,8}{2^{n-1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,2$.

II Polynésie septembre 2007

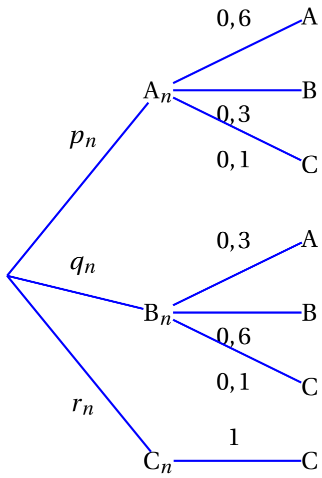
1. 

2. (a) On a $p_1 = p(A_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_1) = 0,4 \times 0,6 + 0,41 \times 0,6 = 0,24 + 0,123 = 0,363$.

   De même on calcule $q_1 = p(A_0 \cap B_1) + p(B_0 \cap B_1) = 0,4 \times 0,3 + 0,41 \times 0,6 = 0,12 + 0,3246 = 0,366$.

   Et $r_1 = p(A_0 \cap C_1) + p(B_0 \cap C_1) + p(C_0 \cap C_1) = 0,4 \times 0,1 + 0,41 \times 0,1 + 0,19 \times 1 = 0,04 + 0,041 + 0,19 = 0,271$.

   On vérifie que $0,363 + 0,366 + 0,271 = 1,000$

   (b) 

   En reprenant les deux premières branches en remplaÁant A par A_n (avec une probabilité p_n d'y arriver) et B par B_n (avec une probabilité q_n d'y arriver), on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} & = & 0,3p_n + 0,6q_n \end{array}\right.$$

3. (a) $S_n = q_n + p_n$ donc $S_{n+1} = q_{n+1} + p_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n + 0,6p_n + 0,3q_n = 0,9q_n + 0,9p_n = 0,9(q_n + p_n) = 0,9S_n$ ce qui montre que la suite (S_n) est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $q_0 + p_0 = 0,81$.

   De même $D_n = q_n - p_n$, donc $D_{n+1} = q_{n+1} - p_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n - (0,6p_n + 0,3q_n) = 0,3q_n - 0,3p_n = 0,3(q_n - p_n) = 0,3D_n$. Donc (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3 de premier terme $q_0 - p_0 = 0,01$.

   (b) On sait que $S_n = (0,9)^n \cdot S_0 = (0,9)^n \times 0,81$.

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$. (car $-1 < 0,9 < 1$).

   Même limite pour la suite (D_n).

   (c) On a : $\left\{\begin{array}{lcl} S_n = q_n + p_n & = & 0,81 \cdot (0,9)^n \\ D_n = q_n - p_n & = & 0,01 \cdot (0,3)^n \end{array}\right.$

   On en déduit par différence et par somme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_n & = & \frac{1}{2}(S_n - D_n) \\ q_n & = & \frac{1}{2}(S_n + D_n) \end{array}\right.$$

   On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$.

   D'après la loi des probabilités totales on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = 1.$$

   Cela signifie qu'à longue échéance il n'y aura plus que des plantes du type C (ce qui semble normal puisque seules celles-ci se remplacent, alors que celles du type A et B se raréfient.)