Exercices de bac sur la loi exponentielle

I Polynésie 2004

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la ´ loi de durée de vie sans vieillissement [a] (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0,125$.

On prendra $0,125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes.

Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Rappel :

Loi exponentielle de paramètre λ *sur* $[0\,;\,+\infty[$, *dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement* :

pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $p([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et

pour $c \geqslant 0$, $p([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

II Métropole septembre 2014

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

   On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

   Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

   (a) Déterminer la valeur de λ.

   (b) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

   (c) Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

   On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

   On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

   (a) Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

   (b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.

   Calculer la probabilité p_1 de l'évènement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.

   (c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'évènement $\{Y \leqslant 70\}$.

   Le restaurant a reçu 81 réservations.

   Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

Correction

I

1. On a $P(X > 10) = 0,286 = \mathrm{e}^{10\lambda}$, équation qui donne $\lambda = 0,125$ au centième près.
   Dans la suite de l'exercice, on prendra l = 0,125.
2. La probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois s'écrit $P(X \leqslant 0,5)$.
   $P(X \leqslant 0,5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,5Ö0,125} = 1 - \mathrm{e}^{-0,0625} \approx 0,061$
3. L'appareil a déjà fonctionné 8 années ; la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans est donnée par : $P_(X > 8)(X > 10)$ avec $P(X > 8) = \mathrm{e}^{-8Ö0.125}$.
   $P((X > 10) \cap (X > 8)) = P(X > 10) = \mathrm{e}^{-10\times 0.12}$.
   $P_(X > 8)(X > 10) = \dfrac{P(X > 10)}{P(X > 8)} = \mathrm{e}^{-2\times 0,125} : P(X > 2)öapprox0,779$.
4. On est en présence d'un schéma de Bernoulli. La durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils.
   Le responsable à commandé 15 oscilloscopes. La probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans est la probabilité d'un « succès » et on sait qu'elle vaut $P(X > 10) = 0,286$.
   L'événement « au moins un oscilloscope parmi les 15 a une durée de vie supérieure à 10 ans » est l'événement contraire de « tous les appareils ont une durée de vie inférieure à 10 ans » de probabilité $(1 - 0,286)^{15} = 0,714^{15}$.
   La probabilité qu'au moins un oscilloscope parmi les 15 ait une durée de vie supérieure à 10 ans est donc $1 - 0,714^{15} \approx 0,779$.
5. On reprend la situation de la question précédente avec n oscilloscopes et on cherche n tel que $1 - 0,714^n \geqslant 0,999$ inéquation équivalente à $0,714n \leqslant 10^{-3}$ et qui donne $n \geqslant \dfrac{\ln\left(10^{-3}\right)}{\ln 0,714} \approx 20,5$.
   L'établissement devrait acheter 21 oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999

II

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients. On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
   Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.
   (a) Le temps moyen d'attente est de 10 minutes donc $E(X) = 10$; or $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc $\lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$.
   (b) La probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes est $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
   Comme X suit la loi exponentielle de paramètre $0,1$ on sait que :
   $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = \displaystyle\int_{10}^{20} 0,1\mathrm{e}^{-0,1t}\,\mathrm{t} = \left[-\mathrm{e}^{-0,1t}\right]_{10}^{20} = -\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1} \approx 0,2325$
   (c) Un client attend depuis 10 minutes. La probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table est la probabilité qu'il attende au moins 15 minutes, sachant qu'il a déjà attendu 10 minutes ; c'est-à-dire : $P_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15)$
   On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc que, pour tous réels strictement positifs s et t : $P_{X\geqslant t}(X \geqslant s + t) = P(X \geqslant s)$.

On en déduit que $P_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = P(X \geqslant 5)$.

On sait que, pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$ donc
$P(X \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,1\times 5} = 1 - \mathrm{e}^{-0,5}$; $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right) = \mathrm{e}^{-0,5} \approx 0,6065$

La probabilité cherchée est $0,6065$.

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

   On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

   On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

   (a) La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.

   Une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ a pour espérance mathématique np et pour écart type $\sqrt{np(1-p)}$.
   Donc $E(Y) = n \times 0,8 = 0,8n$ et $\sigma(Y) = \sqrt{n \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{0,16n}$

   (b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.

   À la calculatrice, on trouve $p_1 = P(Z \leqslant 71) \approx 0,96$.

   (c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'évènement $\{Y \leqslant 70\}$. Le restaurant a reçu 81 réservations.

   On cherche donc la probabilité que plus de 70 clients se présentent, c'est-à-dire $P(Y > 70)$. Or $P(Y > 70) = 1 - P(Y \leqslant 70) = 1 - p_1 \approx 0,04$.

   La probabilité cherchée est $0,04$.