Exercices de bac sur la fonction $\ln$

I Nouvelle Calédonie mars 2015

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

Soit a un nombre réel strictement positif.

On note Δ_a la droite d'équation $y = ax$ et Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère orthogonal $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de points d'intersection de Γ et Δ_a suivant les valeurs de a.

Pour cela. on considère la fonction f_a définie pour tout nombre réel x par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^x - ax.$$

On admet pour tout réel a que la fonction f_a est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. **Étude du cas particulier** $a = 2$

   La fonction f_2 est donc définie pour tout x réel par $f_2(x) = \mathrm{e}^x - 2x$.

   (a) Étudier les variations de la fonction f_2 sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ (*on ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition*.

   (b) En déduire que Γ et Δ_2 n'ont pas de point d'intersection.

2. **Étude du cas général où** a **est un réel strictement positif**

   (a) Déterminer les limites de la fonction f_a en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a est $a - a\ln a$.

   (c) Étudier le signe de $a - a\ln a$ suivant les valeurs du nombre réel strictement positif a.

   (d) Déterminer selon les valeurs du réel a le nombre de points communs à Γ et Δ_a.

II Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

   (b) Que permet de calculer cet algorithme ?

   (c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

   (d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

I Nouvelle Calédonie mars 2015

1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2$
$f_a'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$
$f_a'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à $f_a(a+\ln 2) = \mathrm{e}^{a=\ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + \mathrm{e}^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^a$.

x	$-\infty$		$a+\ln 2$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a		$\searrow$	$f_a(a+\ln 2)$	$\nearrow$	

2. En $a + \ln 2$, on a $f_a(a+\ln 2) = 2 - 2a - \ln 2 + \mathrm{e}^a$.
Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\varphi(a) = 2 - 2a - \ln 2 + \mathrm{e}^a$
$\varphi'(a) = -2 + \mathrm{e}^a$; $-2 + \mathrm{e}^a > 0 \iff \mathrm{e}^a > 2 \iff a > \ln 2$
$\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	$4 - 4\ln 2$	$\nearrow$	

Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à
$\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + \mathrm{e}^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2$.

II Amérique du Nord mai 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (a) On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ et
   $u_3 = \sqrt{2u_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1.8340$ à 10^{-4} près.

   (b) Cet algorithme permet le calcul du terme de rang n.

   (c) D'après le tableau des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

2. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

- Initialisation

On a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$

- Hérédité

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n \leqslant 2$.

On a : $0 < u_n \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 < 2u_n \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2u_n} \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

- Conclusion

$0 < u_0 \leqslant 2$

Si $0 < u_n \leqslant 2$ alors $0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

D'après l'axiome de récurrence on a pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

(b) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

Comme pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, comparons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{2u_n}{u_n^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{u_n}}$.

Et comme on a démontré précédemment que $u_n \leqslant 2$, alors $\dfrac{2}{u_n} \geqslant 1$ et $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} \geqslant 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; (u_n) est une suite croissante.

(c) On vient de prouver que d'une part la suite (u_n) est strictement croissante et que d'autre part elle est majorée par 2.

Ceci démontre que la suite (u_n) est convergente.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

(a) Pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$ donc en particulier :

$u_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

On a aussi pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$, mais $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Alors : $v_{n+1} = \ln\sqrt{2u_n} - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln 2) - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 2) = \dfrac{1}{2}v_n$

On peut en conclure que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

(b) On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $v_n = -\ln 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$v_n = \ln(u_n) - \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right) = v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{2} = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = 2e^{v_n}$. u_n en fonction de n.

(c) Comme $\dfrac{1}{2} \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x\right) = 1$, alors par composition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{v_n}\right) = 1$ et finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 2$

(d) L'algorithme ci-dessous permet d' afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1,999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n