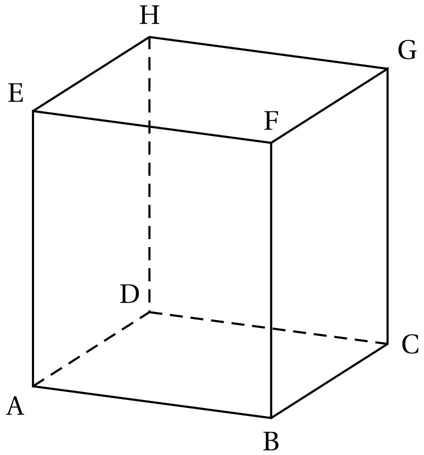
Sujets de bac

I Pondichéry avril 2015

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $P\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$.



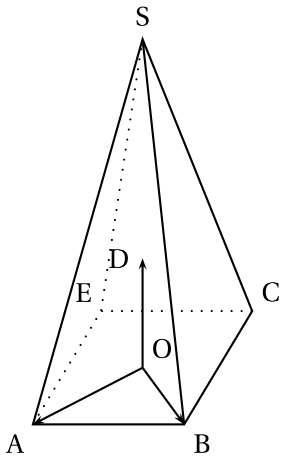
1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
   En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.
3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.
   (a) Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.
   (b) À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?
4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.
5. On considère le vecteur $\vec{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ normal au plan (MNP).
   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).
   (b) On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.
   (a) Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\,\frac{24}{35}\,;\,\frac{23}{35}\right)$.
   (b) On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
   Calculer le volume du tétraèdre MNPF.

Algorithme 1
Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)
Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

II Amérique du Nord juin 2015

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,3)$ dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\,;\,-\frac{1}{6}\,;\,0\right)$.

   Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

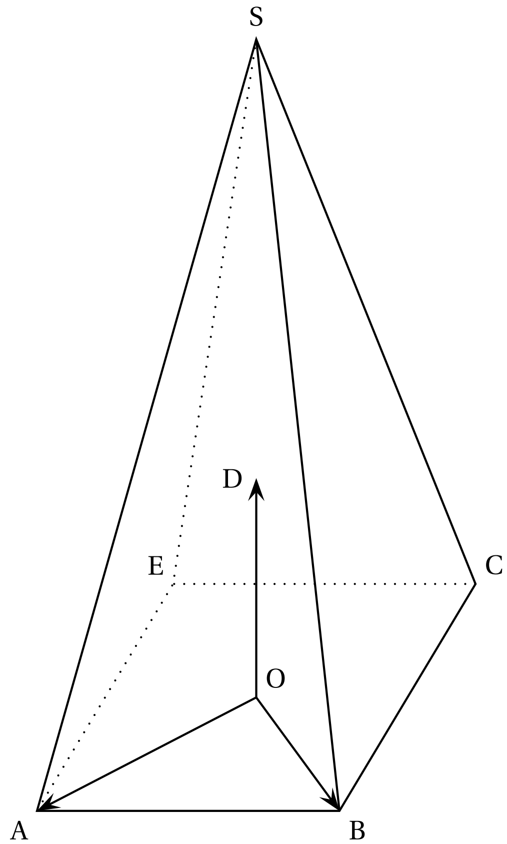
Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$.

   Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.
3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).
4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

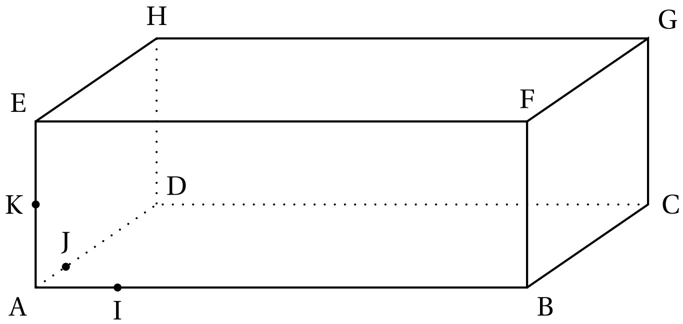
Annexe 1 (Exercice 1)



III Polynésie juin 2015

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

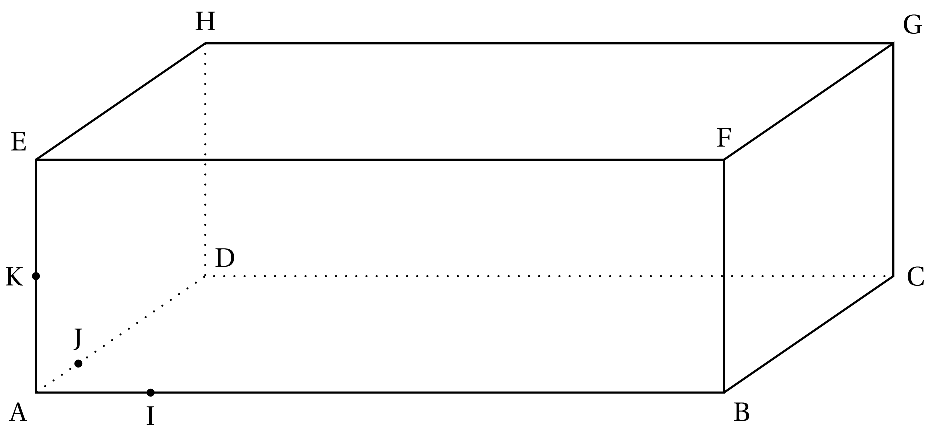


On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie)**. On ne demande pas de justification.

textbfÀ rendre avec la copie

EXERCICE 1



IV Métropole Réunion septembre 2015

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points A(0 ; 1 ; −1) et B(−2 ; 2 ; −1).

— la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& -1-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. (a) Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

   (b) Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ et passe par le point M.
4. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\,;\,3-3u\,;\,-1)$.
5. (a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.

   (b) Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
6. (a) Exprimer MN^2 en fonction de u.

   (b) En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.

V Métropole juin 2015

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t=0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\,;\,-1\,;\,5)$ et $N_t(11\,;\,0,8t\,;\,1+0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. (a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

   (b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.

   (c) Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point E(11 ; −1 ; 5).

   (d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. (a) Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

   (b) À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?