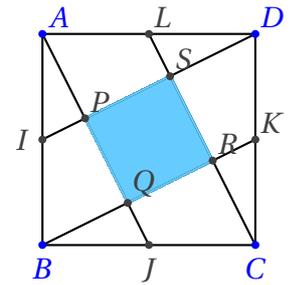


Exercices sur les produits scalaires dans le plan

I

ABCD est un carré de côté a . I, J, K et L sont les milieux des côtés du carré. On considère le quadrilatère PQRS (voir figure). On va montrer que c'est un carré et calculer son aire.

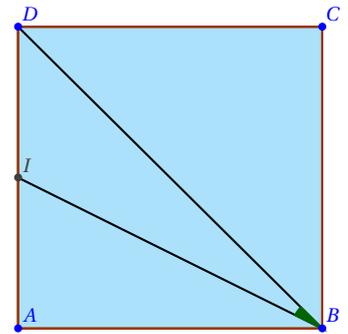


1. Montrer que $\vec{AJ} \cdot \vec{DI} = 0$.
2. Expliquer alors rapidement pourquoi PQRS est un rectangle.
3. Montrer que $\vec{PS} \cdot \vec{ID} = \vec{AL} \cdot \vec{AD}$.
4. En déduire la valeur de PS en fonction du côté a du carré ABCD.
5. Montrer alors que le quadrilatère PQRS est un carré.
Exprimer l'aire du carré PQRS en fonction de celle du carré ABCD.

II

Soit ABCD un carré et soit I le milieu de [AD]. On pose $a = AB$.

1. On note θ l'angle \widehat{IBD} .
Montrer que : $\vec{BI} \cdot \vec{BD} = \left(\frac{a^2}{2}\sqrt{10}\right) \times \cos(\theta)$.
2. En exprimant \vec{BI} en fonction de \vec{BA} et de \vec{BD} , montrer que $\vec{BI} \cdot \vec{BD} = \frac{3}{2}a^2$.
3. En déduire que l'angle θ est le même dans tous les carrés, c'est à dire qu'il ne dépend pas de la longueur du côté du carré.
4. Donner une valeur approchée de cet angle en degré, au centième près.



III Puissance d'un point par rapport à un cercle :

\mathcal{C} est un cercle de centre O et de rayon R.

M est un point non situé sur le cercle \mathcal{C} .

Deux droites issues de M coupent \mathcal{C} respectivement en A et B, et en C et D. L'objectif est de montrer que :

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MC} \cdot \vec{MD}.$$

1. On note A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle \mathcal{C} .
Démontrer que : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MA}'$.
2. (a) En utilisant la relation de Chasles, montrer que $\vec{MA} \cdot \vec{MA}' = MO^2 - R^2$.
(b) En déduire que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MC} \cdot \vec{MD}$.
3. *Information* : On montre ainsi que le produit scalaire $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ est indépendant de la sécante issue de M. Il ne dépend que de la distance de M à O. Le réel $MO^2 - R^2$ (nul lorsque M est un point du cercle) est appelé puissance de M par rapport à \mathcal{C} . (Il est positif si M est à l'extérieur de \mathcal{C} et négatif si M est à l'intérieur).

