TS : exercices sur la dérivation

I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$ par

$$f(x)=\frac{1}{9x^2-24x+16}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à t'axe des abscisses.
4. Étudier le sens de variation de f.
5. Tracer les asymptotes. puis la courbe représentative de f dans un repère.

II

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par :

$$f(x)=\frac{ax+b}{x-3} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels .}$$

On sait que la droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontalle à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$. De plus, $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

1. Retrouver les valeurs de a et b.
2. Étudier les limite de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

III

Première partie

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,4]$ par

$$f(x)=\sqrt{x(4-x)}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,4[$ et donner l'expression de la dérivée sur cet intervalle.
2. Démontrer que f n'est dérivable ni en 0, ni en 4.
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse 2.

Deuxième partie

On considère la fonction définie sur $[0\,;\,4]$ par

$$g(x)=x\sqrt{x(4-x)}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Démontrre que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,4[$ et donner l'expression de sa dérivée sur cet intervalle.
2. La fonction g est-elle dérivable :
   (a) en 0 ?
   (b) en 4 ?
3. Étudier les variations de la fonction g.
4. Démontrer que l'équation $g(x)=1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,3]$.
5. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de cette solution à 0,01 près.
6. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.
7. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ et sa tangente au point d'abscise 2.

Troisième partie

On considère la fonction k définine sur $]0\,;\,4]$ par

$$k(x)=\frac{\sqrt{x(4-x)}}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Étudier la limite de la fonction k en 0.
2. Démontrer que la fonction k est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,4[$ et donner I'expression de sa dérivée k' sur cet intervalle.
3. La fonction k est-elle dérivable en 4 ?
4. Étudier les variations de la fonction k.
5. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.
6. Tracer la courbe $\mathscr{C}_k$ et sa tangente au point d'abscisse 2.