Fonction exponentielle

Table des matières

I Introduction : une certaine « équation différentielle » que l'on retrouve souvent :

Remarque : une équation différentielle est une équation, dont l'inconnue est une fonction f et qui relie la fonction f et sa dérivée f' et/ou ses dérivées d'ordre supérieur. Exemples :

- $f' = 2f$
- $f'' = k\sin(f)$ (où $k \in \mathbb{R}$)
- $f'' = kf$
- $f'' - 3f' + 2f = 0$

1) Pression atmosphérique

En 1648, Pascal met en évidence, par une expérience au Puy de Dôme, la notion de pression atmosphérique. Des travaux ultérieurs ont montré que la pression atmosphérique variait avec l'altitude ; plus précisément, la pression décroît avec l'altitude selon la loi : $p'(h) = -\frac{g}{k}p(h)$ où $p(h)$ est la pression à l'altitude h, g est l'accélération de la pesanteur et k est une constante. On obtient ainsi une équation différentielle du type : $\boxed{p' = Kp}$

2) Radioactivité

En radioactivité, on met expérimentalement en évidence que le nombre d'atomes qui se désintègrent en un temps donné est en moyenne proportionnel au nombre de ces atomes. Soit $N(t)$ le nombre d'atomes à un instant t. On a : $\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t) = -\lambda N(t)\Delta t$, qu'on peut aussi écrire : $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$.($\lambda$ est la constante radioactive) En faisant tendre Δt vers 0, on obtient : $\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N(t)$ qui s'écrit aussi $\boxed{N' = KN}$ (avec $K = -\lambda$).

3) Fonction transformant une somme en produit

Au XVIe siècle, Neper (écossais) cherche des fonctions qui transformeraient les produits en sommes, ce qui permettrait de simplifier les calculs astronomiques. Les réciproques de ces fonctions transforment ainsi les sommes en produits.

Existe-t-il de telles fonctions, raisonnables (c'est-à-dire dérivables sur $\mathbb{R}$), transformant des sommes en produits ?

On connaît déjà des exemples sur $\mathbb{Z}$: Soit a un réel non nul et soit f la fonction définie sur $\mathbb{Z}$ par : $f(n) = a^n$. Alors : Pour tous p et q dans $\mathbb{Z}$, $f(p+q) = a^{p+q} = a^p \times a^q = f(p) \times f(q)$.
Une autre fonction qui convient est la fonction nulle, mais elle n'st pas très intéressante !

Peut-on prolonger une telle fonction à $\mathbb{R}$?

On va donc chercher des fonctions f « raisonnables », c'est-à-dire définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, **non nulles**, telles que, pour tous x et y réels, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (relation appelée relation fonctionnelle).

Propriété

Soit f une fonction non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$. Si, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$,alors :

1. $f(0) = 1$
2. Pour tout réel x, $f'x) = kf(x)$ où $k = f'(0)$.

Démonstration :

(1) f est non nulle, donc il existe un nombre x_0 tel que : $f(x_0) \neq 0$. D'après la relation fonctionnelle, on a alors : $f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \times f(0)$, d'où : $\boxed{f(0) = 1}$.

(2) Soit x un réel fixé. On définit les fonctions φ et ψ sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(y) = f(x+y)$ et $\psi(y) = f(x) \times f(y)$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a : $\varphi'(y) = f'(x+y)$. De même, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\psi'(y) = f(x)f'(y)$. Or, pour tout réel y, $\varphi(y) = \psi(y)$, donc $\varphi'(y) = \psi'(y)$, c'est-à-dire $f'(x+y) = f(x)f'(y)$.

En particulier, pour $y = 0$: **f'(x)=f(x)f'(0)**

f vérifie donc l'équation différentielle : $\boxed{f' = Kf}$

Remarque : On constate qu'à chaque fois, on a une relation du type $\boxed{f' = kf}$. On est donc amené à se poser la question de l'existence d'une telle fonction.
Dans la suite, on étudie la fonction f vérifiant $f' = f$ (donc $k = 1$) et $f(0) = 1$. (le cas général $f' = kf$ et/ou $f(0) \neq 1$ s'y ramène).

Remarque : il est facile de vérifier qu'aucune des fonctions usuelles ne convient ; la fonction cherchée, si elle existe, est donc une **nouvelle fonction**.

II Fonction exponentielle

Théorème (première partie admise)

- Il existe une fonction f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Celle-ci est **unique**.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle. On la note exp.

Démonstration

- On **admet** l'existence.
- Cette fonction ne s'annule pas.

  Démonstration : Considérons la fonction g définie par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables. La dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $x \mapsto -f'(-x)$ car la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto af(ax+b)$. On en déduit que : $f'(x) = f'(x)f(-x) + f(x) \times \left(-f'(-x)\right) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$. Or, par définition de f, $f' = f$ donc $g'(x) = f(x)f(-x) - (x)f(-x) = 0$.
  g est donc une fonction **constante** sur $\mathbb{R}$.
  Pour trouver cette valeur, il suffit de calculer l'image dun nombre particulier.
  $g(0) = [f(0)]^2 = 1^2 = 1$ donc $g(0) = 1$. Par conséquent : $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  f ne peut donc pas s'annuler ; en effet, s'il existait une valeur x_0 avec $f(x_0) = 0$, on aurait : $g(x_0) = f(x_0)f(-x_0) = 0$; or $g(x_0) = 1$, ce qui est contradictoire.
  Positivité : Supposons qu'il existe un nombre x_0 avec $f(x_0) < 0$. f est dérivable, donc continue. $f(x_0) < 0$ et $f(0) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un nombre α tel que $f(\alpha) = 0$, ce qui est impossible d'après ce qui précède.
- **Démonstration de l'unicité** (**à connaître**) Supposons qu'il existe une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant également $g' = g$ et $g(0) = 1$. Soit la fonction $h = \dfrac{f}{g}$. h est dérivable : $h' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} = 0$ (car $f' = f$ et $g' = g$). h est donc constante sur $\mathbb{R}$. $h(0) = 1$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$ donc $f(x) = g(x)$ donc $f = g$.

Cette unique fonction f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ est notée exp.

Résumé des propriétés :

Pour tout réel x :

- $\exp x > 0$
- $\exp 0 = 1$
- $\exp'(x) = \exp(x)$

III Étude de la fonction exponentielle :

III.1 Sens de variation :

Propriété

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$, donc pour tout réel x, $\exp'(x) > 0$ puisque $\exp(x) > 0$. La fonction exp est donc croissante.

III.2 Limites à l'infini

Théorème

$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Démonstration : Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \exp(x) - x$. f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \exp'(x) - 1 = \exp(x) - 1$. exp est croissante et $\exp(0) = 1$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$. On en déduit que f est croissante et comme $f(0) = \exp(0) - 0 = \exp(0) = 1 > 0$ donc $f(x) > 0$. Par conséquent : $f(x) > 0$ donc $\boxed{\exp(x) > x}$. Or $\lim_{x\to=\infty} x = +\infty$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty}$.

On a vu au début que, pour tout x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$. En posant $X = -x$, donc $x = -X$, on a : $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{X\to+\infty} \exp(-X) = \lim_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\exp(X)} = 0$.

Conséquences :

1. Pour tout $a > 0$, $\exp(a) > 0$
2. Pour tous réels a et b, $\exp a = \exp b \Leftrightarrow a = b$.
3. Pour tous réels a et b, $\exp a < \exp b \Leftrightarrow a < b$.

Démonstration :

1. exp est croissante et $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ donc exp est une fonction positive.
2. (a) $a = b \Rightarrow \exp(a) = \exp(b)$ comme pour n'importe quelle fonction.
   (b) $\exp(a) = \exp(b) \Rightarrow a = b$ car la fonction exp est croissante
3. Même démonstration que dans le cas d'égalité

IV Propriétés algébriques

IV.1 Exponentielle de l'opposé d'un réel :

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$

Démonstration : On a déjà vu que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$.

IV.2 Exponentielle de la somme de deux réels :

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Démonstration Soit y un réel quelconque fixé. On considère alors la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x + y)$ (la variable est x). f est dérivable, comme composée de fonctions dérivables ; $\dfrac{1}{\exp(y)}$ est une constante. La dérivée de $x \mapsto \exp(x + y)$ est $x \mapsto 1 \times \exp'(x + y) = \exp(x + y)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(x + y)$ donc

$f' = f$. $f(0) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(0 = y) = \dfrac{1}{\exp(y)} \times \exp(y) = 1$. On en déduit que la fonction f est la fonction exponentielle (unicité de la fonction vérifiant ces propriétés). Par conséquent : $f(x) = \exp(x)$ donc, pour tout x, $\dfrac{1}{\exp(y)} \exp(x+y) = \exp(x)$, d'où $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$

Remarque : on a vu dans le I que la seule fonction vérifiant cette relation fonctionnelle et $f(0) = 1$ devait vérifier $f' = f$, donc était la fonction exponentielle (par unicité de la fonction vérifiant les deux conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$).

IV.3 Exponentielle de la différence de deux réels :

Propriété

Pour tous réels x et y : $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

Démonstration : $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(x)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Exemple : Pour tout réel x, $\dfrac{\exp(2x+3)}{\exp(2x-1)} = \exp[(2x-3)-(2x-1)] = \exp 4$

IV.4 Exponentielle d'une somme de réels :

Propriété

Pour tous réels x_1, x_2, ..., x_n, $\exp(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \cdots \times \exp(x_n)$. **Écriture symbolique** : $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(x_i)$

Démonstration : On démontre la propriété par récurrence sur n.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, il n'y a qu'un terme x_1 ; on a évidemment $\exp(x_1) = \exp(x_1)$!
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque. $\exp(x_1 + x_2 + \cdots x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \cdots \exp(x_n)$. Alors : $\exp(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}) = \exp[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}] = \exp((x_1 + x_2 + \cdots + x_n)) \times \exp(x_{n+1})$ (d'après la propriété fonctionnelle de l'exponentielle) $= \left[\exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \cdots \exp(x_n)\right] \times \exp(x_{n+1}) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \cdots \exp(x_n) \times \exp(x_{n+1})$. (c.q.f.d.)

Propriété

Pour tout réel x, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Démonstration : Lorsque $n > 0$, on applique la propriété précédente en prenant tous les x_i égaux à x. Pour $n = 0$, l'égalité est vérifiée. Si $n < 0$, $\exp(nx) = \exp((-n)(-x)) = (\exp(-x))^{-n} = \left[\dfrac{1}{\exp x}\right]^{-n} = (\exp(x))^n$

IV.5 Le nombre e ; la notation e^{x} :

Définition

$e = \exp(1)$. Valeur approchée : $e \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\,662\,497\,757\,247\,093\,699\,95$.

Pour la plupart des exercices, il suffit d'utiliser $\mathrm{e} \approx 2{,}7$ sou $\mathrm{e} \approx 2;72$.

Remarque : e est, comme π, un nombre transcendant, c'est-à-dire solution d'aucune équation polynomiale, donc en particulier non rationnel)

Notation

Pour tout entier n, on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp 1)^n = e^n$ en utilisant la notation précédente. Plus généralement, on convient de noter $\exp(x)$ par e^x.

IV.6 Résumé des différentes propriétés avec cette notation :

Propriétés

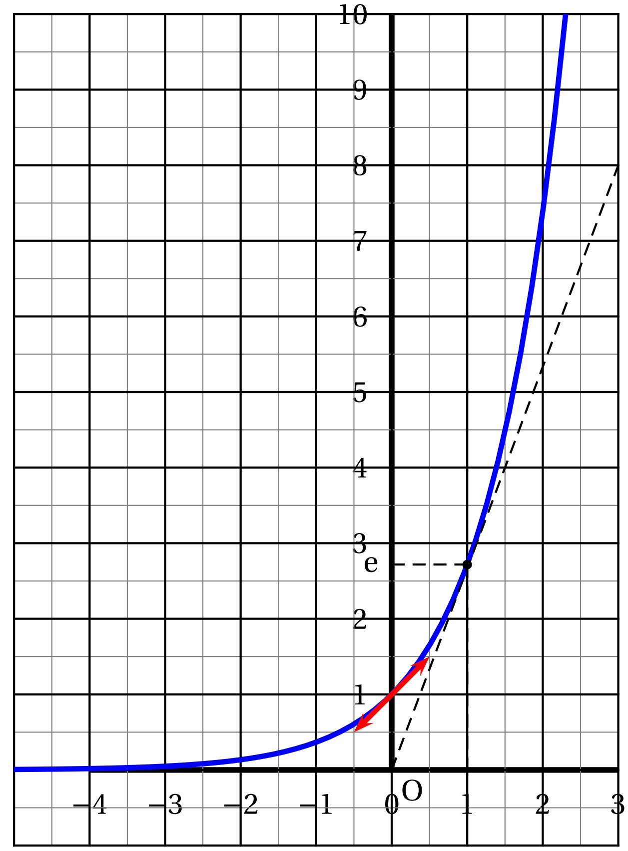
Pour tous réels x, y et tout entier relatif n :

- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

IV.7 Courbe représentative avec les tangentes en 0 et 1

- La tangente en 0 a pour coefficient directeur $\exp'(0) = \exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.
- La tangente en 1 a pour équation $y = exp'(1)(x-1) + \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}x$; cette tangente passe donc par l'origine.
- Le fonction exp est croissante ; l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2,7$ et $\mathrm{e}^2 \approx 7,4$

Courbe représentative de exp



IV.8 Limites importantes (croissances comparées)

Théorème

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$

Démonstrations :

- Pour tout x, $\mathrm{e}^x > x$ donc, pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > \dfrac{x}{2}$ d'où, puisque $x > 0$ $(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})^2 > \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{-X}{\mathrm{e}^{-X}} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{\mathrm{e}^X} == \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}} = 0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$.
- Pour tout $n \neq 0$, on pose $X = \dfrac{x}{n}$ (et donc $x = nX$). On a alors : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{nX}}{(nX)^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\left(\mathrm{e}^X\right)^n}{n^nX^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \left[\dfrac{1}{n^n}\left(\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}\right)^n.\right]$.
  $\dfrac{1}{n^n}$ est une constante ; $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}\right) + \infty$ d'où $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}\right)^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
- Pour $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x$, on pose $X = -x$. Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = \lim\limits_{X\to+\infty} (-X)^n\mathrm{e}^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \left[(-1)^n\dfrac{X^n}{\mathrm{e}^X}\right] = \lim\limits_{X\to+\infty} \left[(-1)^n\dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X^n}}\right] =$
  0 car $\lim\limits_{X\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^X}{X^n}\right) = +\infty$

V Exponentielle d'une fonction

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable et a pour dérivée : $(e^u)' = u'e^u$.

Exemples :

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+4}$; $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 2x+3$. $u'(x) = 2$; $f' = u'\mathrm{e}^u$ donc $\boxed{f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x+3}}$.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2$. $f' = u'\mathrm{e}^u$ avec $u'(x) = 2x$ donc $\boxed{f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}}$.

c) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$. $f' = u'\mathrm{e}^u$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.