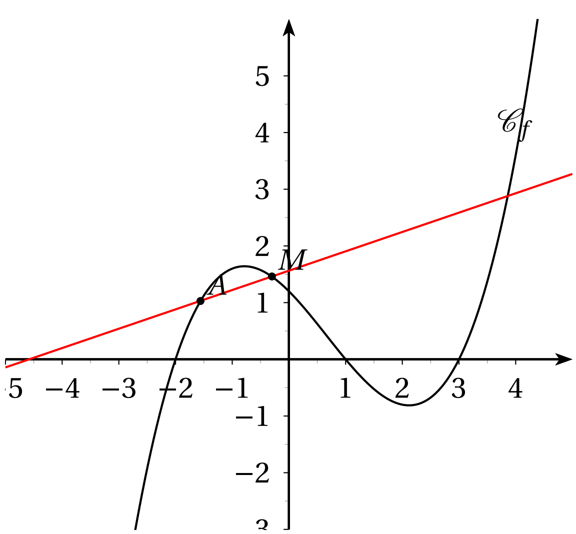
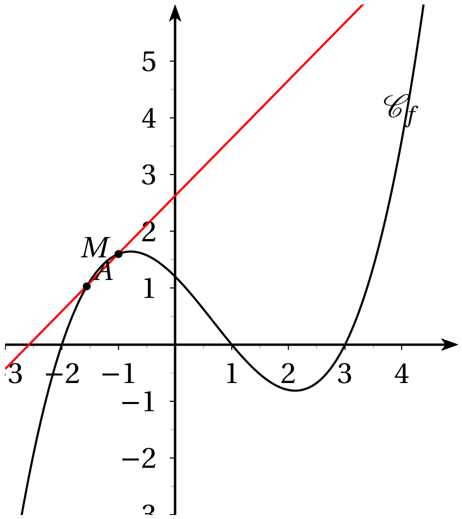
Fonctions numériques : dérivation

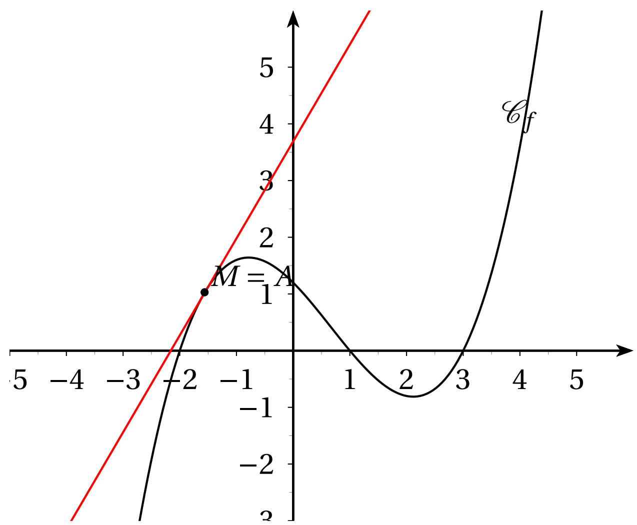
Table des matières

I Notion de tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et soit A un point fixe de $\mathscr{C}_f$. Soit M un point variable de $\mathscr{C}_f$. On trace la droite (AM) qui est sécante à $\mathscr{C}_f$. On fait tendre M vers A. Si, lorsque M tend vers A, la sécante admet une position limite, on dit que cette limite est tangente à $\mathscr{C}_f$.







II Nombre dérivé de f en a et fonction dérivée :

Définition

Notons a l'abscisse de A et x l'abscisse de M. Le coefficient directeur de la sécante (AM) est : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Dire que la sécante a une position limite qui est la droite tangente à $\mathscr{C}_f$ en A signifie que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe.

Si ce nombre **existe** et s'il est **fini**, on pose : $\mathbf{f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ et ce nombre est le **nombre dérivé** de f en a.

On dit alors que f est dérivable en a.

Remarque :

En posant $x = a+h$, on obtient : $\mathbf{f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.

Exemple : $f(x) = x^2$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{[a+h]^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$.

Par conséquent : $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \right) = 2a$.

f est dérivable en a et $\boxed{f'(a) = 2a}$

Par définition, $f'(a)$ est **le coefficient directeur de la tangente** à $\mathscr{C}_f$ en a.

Propriété

L'équation de la tangente est alors : $\mathbf{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

Démonstration :

Rappel : la droite, de coefficient directeur a et passant par le point M_0 de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ a pour équation $y - y_0 = a(x - x_0)$.

En effet, l'équation est de la forme $y = ax + b$.

Comme M_0 appartient à cette droite, ses coordonnées vérifient cette équation, donc $y_0 = ax_0 + b$.

Par conséquent : $\begin{cases} y &= ax+b \\ y_0 &= ax_0+b \end{cases}$.

Par soustraction, on obtient : $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Pour la tangente, on obtient donc : $y - y_A = f'(a)(x - x_A)$ qui donne $y = f'(a)(x - x_A) + f(a)$.

Définition

f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tout a de I.

Remarque

La dérivée f' de f est elle-même une fonction. Si elle est dérivable, on appelle f'' sa dérivée (dérivée seconde de f).

Cette dérivée seconde peut elle-même être dérivable et ainsi de suite. Les dérivées d'ordre n, avec $n \geqslant 3$, se notent $f^{(n)}$.

Ainsi : $f'' = (f')'$; $f^{(3)} = (f'')'$ et plus généralement $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$

Exemples :

1. Soit $f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x + 1$.
   On a : $f'(x) = 12x^3 + 10x + 2$; $f''(x) = 36x^2 + 10$; $f^{(3)}(x) = 72x$: $f^{(4)}(x) = 72$; $f^{(5)}(x) = 0$ et les dérivées suivantes sont toutes égales à la fonction nulle.
2. Soit $f(x) = \sin x$.
   Alors : $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f^{(3)}(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$. On retombe sur la fonction initiale.
3. Imaginons qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, $f'(x) = f(x)$. f est-elle dérivable à l'ordre 3 si oui, que vaut $f^{(3)}$?
   Réponse : $f' = f$ donc f' est dérivable et $f'' = (f')' = f'$ et de même $f^{(3)} = f$.
   On pourrait alors montrer par récurrence, que la fonction f vérifie alors : pour tout n, $f^{(n)} = f$.
   On étudiera cette fonction plus en détail dans un prochain chapitre.

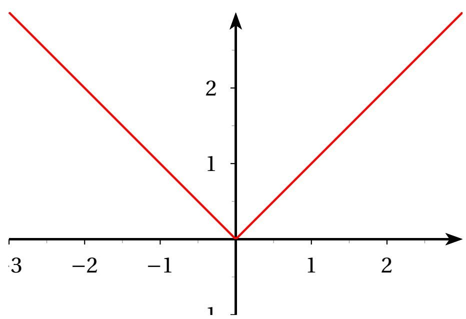
Exercices

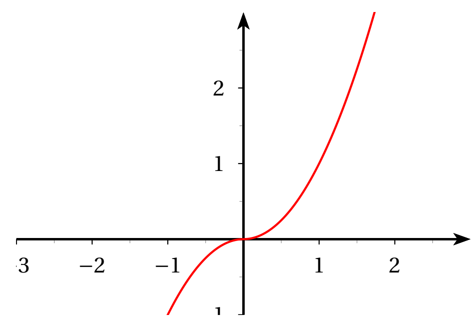
- Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
- Étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x|x|$ en 0.

Solutions :

- Soit f la fonction $x \mapsto |x|$.
  $\forall x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|-0}{x-0} = \dfrac{|x|}{x}$.
  Si $x<0$, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$ et pour $x>0$, $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$.
  On en déduit que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-1) = -1$, alors que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1) = 1$.
  La limite à gauche et à droite n'est pas la même, donc la limite en 0 n'existe pas ; f n'est pas dérivable en 0 (mais l'est à gauche et à droite) ; on dit que la courbe admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.
- Soit $g : x \mapsto x|x|$. Cette fois, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(|x|) = 0$; la limite existe, donc la fonction g est dérivable en 0 et la courbe représentative de g a une tangente en 0.

Voici les deux représentations graphiques de f et de g.





III Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f définie par :	Fonction f' définie par :	Domaine de décidabilité de validité
$f(x) = k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

IV Dérivées et opérations :

Soient u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

- $(ku)' = ku'$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, $u(x) \neq 0$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$

Exemples :

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $a \in I$; alors, f est continue en a

Attention, la réciproque est fausse ; une fonction peut être continie en a, mais pas dérivable ; exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ en 0.

V Dérivée de la composée de quelques fonctions :

V.1 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété

Soit u une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle I., de fonction dérivée u'.
La fonction f définie sur I par $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout nombre x tel que $u(x) \neq 0$ et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Démonstration :

Démonstration :
Soit $x \in I$ tel que $u(x) > 0$. Soit J un intervalle de I contenant I.
Soit h un réel non nul, tel que $x + h \in J$.
Soit $A(h) = \dfrac{\sqrt{u(x+h)} - u(x)}{h}$ et on étudie la limite quand h tend vers 0.

$$A(h) = \frac{\left[\sqrt{u(x+h)} - \sqrt{u(x)}\right] \times \left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right]}{\left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right]} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h\left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right]} \text{ (avec } \sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)} > 0\text{).}$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) = u'(x)$; $\lim\limits_{h \to 0} u(x+h) = u(x)$ par continuité de u donc $\lim\limits_{h \to 0} \left[\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)}\right] = 2\sqrt{x}$.

On en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} A(h) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ cqfd.

Exemple : $f(x)=\sqrt{3x^2+5x+7}$ définie sur $\mathbb{R}$.
$f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=3x^2+5x+7$ et $u'(x)=6x+5$.
Alors : $\boxed{f'(x)=\dfrac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+7}}}$.

V.2 Dérivée de $x\mapsto u^n(x)$, $n\in\mathbb{N}^*$

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit u' sa fonction dérivée. et soit n un entier relatif non nul.
La fonction u^n est dérivable et $\left(u^n\right)'=nu'\times u^{n-1}$.

Démonstration Soit $A(h)=\dfrac{u^n(x+h)-u^n(x)}{h}$. On doit étudier la limite de $A(h)$ quad h tend vers 0.
On a vu en première que la fonction $f:x\mapsto x^n$ est dérivable et que $f'(x)=nx^{n-1}$.
Cela signifie que $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}}$.
En changeant de lettre, on a : $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{(z+k)^n-z^n}{k}=nz^{n-1}$
Posons $\varepsilon(k)=\dfrac{(z+k)^n-z^n}{k}-nz^{n-1}$. On a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(k)=0}$.
On obtient, après transformation :
$\dfrac{(z+k)^n-z^n}{k}=nz^{n-1}+\varepsilon(k)$ donc $(z+k)^n-z^n=\left(nz^{n-1}+\varepsilon(k)\right)\times k$

On pose alors $u(x)=z$ et $u(x+h)=z+k$.
$u^n(x+h)-u^n(x)=(z+k)^n-z^n=\left(nz^{n-1}+\varepsilon(k)\right)\times k=\left(nu^{n-1}(x)+\varepsilon\left(u(x+h)-u(x)\right)\right)\times(u(x+h)-u(x))$.
On en déduit :
$$\boxed{\frac{u^n(x+h)-u^n(x)}{h}=\left(nu^{n-1}(x)+\varepsilon\left(u(x+h)-u(x)\right)\right)\times\frac{u(x+h)-u(x)}{h}}$$
On a : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\right)=u'(x)$ car la fonction u est dérivable.
La fonction u est continue, donc $\lim\limits_{h\to 0}u(x+h)=u(x)$ donc $\lim\limits_{h\to 0}[u(x+h)-u(x)]=0$.
Alors : $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon\left(u(x+h)-u(x)\right)=\lim\limits_{k\to 0}\varepsilon(k)=0$ en posant $k=u(x+h)-u(x)$.
Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\left(nu^{n-1}(x)+\varepsilon\left(u(x+h)-u(x)\right)\right)=nu^{n-1}(x)$.
Alors : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u^n(x+h)-u^n(x)}{h}\right)=nu^{n-1}(x)\times u'(x)}$.

Exemples :

1. Soit $f:x\mapsto\left(3x^2+5x-7\right)^5$; $f=u^5$ avec $u(x)=\left(3x^2+5x-7\right)^5$.
   On a alors $f'=\left(u^7\right)'=7u'u^{7-1}=7u'u6$ avec $u'(x)=6x+5$.
   Par conséquent : $\boxed{f'(x)=7(6x+5)\left(3x^2+5x-7\right)^6}$.
2. Soit $f:x\mapsto\dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)^5}$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{-5}$ donc $f=u^{-5}$ avec $\left\{\begin{array}{l} n=-5 \\ u(x)=x^2+x+1 \end{array}\right.$.

$f'=nu'u^{n-1}=-5u'u^{-6}=-\dfrac{5u'}{u^6}$ avec $u'(x)=2x+1$.

Par conséquent : $f'(x)=-\dfrac{5(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^6}$

V.3 Dérivée de la fonction $x\mapsto f(ax+b)$

Propriété

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux nombres a et b.
La fonction $g : x\mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g' x\mapsto a\times f'(ax+b)$.

Démonstration

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}=\frac{f(ax+b+ah)-f(x)}{h}=a\times\frac{f(ax+b+ah)-f(x)}{ah}.$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(ax+b+ah)-f(x)}{ah}\right)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(ax+b+k)-f(ax+b)}{k}=f'(ax+b)$.

On en déduit : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\boxed{a\times f'(ax+b)}$.

Exemple : Soit $f : x\mapsto \cos(2x+3)$; $f'(x)=2\cos'(2x+3)=\boxed{-2\sin(2x+3)}$.

V.4 Dérivée de $\sin u$ et $\cos u$

Propriété admise : si u est dérivable, $\sin u$ est dérivable et $\cos u$ est dérivable.

- $(\sin u)'=u'\times\sin' u=u'\cos u$
- $(\cos u)'=u'\times\cos' u=-u'\sin u$

Exemple : soit $f(x)=\sin\left(x^2\right)$.
$f=\sin u$ avec $u(x)=x^2$.
$f'=u'\cos u$ avec $u'(x)2x$ donc $\boxed{f'(x)=2x\cos\left(x^2\right)}$

V.5 Dérivée de $f\circ g$

Théorème admis

Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans J et f une fonction définie et dérivable sur J.
Alors $f\circ g$ est dérivable et $\left(f\circ g\right)'=g'\times\left(f'\circ g\right)$.
Pour tout $x\in I$, $\left(f\circ g\right)'(x)=g'(x)\times f'(g(x))$.

VI Application de la dérivabilité :

VI.1 Utilisation du nombre dérivé pour le calcul de certaines limites :

On sait que si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

Exemple : $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

VI.2 Sens de variation d'une fonction :

Théorème (admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
Si f' est strictement positive sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs o˘ elle s'annule, alors f est croissante sur I.
Si f' est strictement négative sur I sauf éventuellement pour un certain nombre fini de valeurs o˘ elle s'annule, alors f est décroissante sur I.

Exemple :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 0$.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

1. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$.
2. En déduire la comparaison des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Solution :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2\sin x + 2x$. Pour étudier le signe de $f'(x)$, dérivons f'. $f''(x) = -2\cos x + 2 = 2(1 - \cos x) \geq 0$. f' est croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $f'(0) = 0$, on en déduit le signe de f'.
   On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,; 0[$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Le minimum $f(0)$ vaut 0, donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

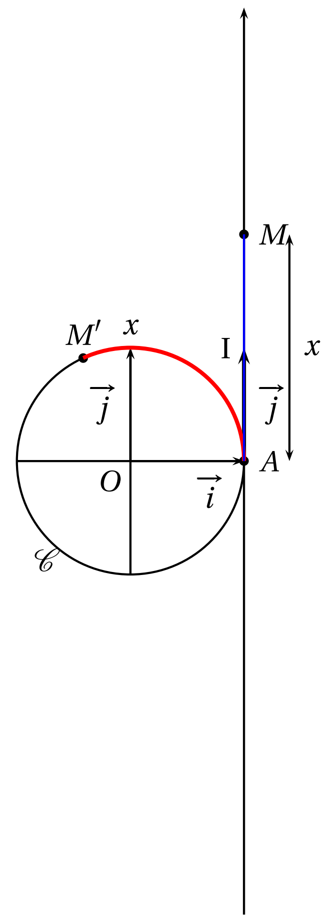
VII Rappels sur les fonctions cosinus et sinus :

VII.1 Radian

Définition

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 unité.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique, muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.
Soit A le point tel que $\overrightarrow{i}=\overrightarrow{OA}$ et $\mathscr{D}$ la droite tangente au cercle $\mathscr{C}$ passant par $\mathscr{D}$.
Soit I le point de la droite $\mathscr{D}$ tel que AI = 1 (I au-dessus de A).
On définit ainsi un repère sur $\mathscr{D}$.



On enroule la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$, la demi-droite supérieure s'enroulant dans le sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre, qu'on appelle aussi **sens direct** ou sens **trigonométrique**.
Soit M un point quelconque de $\mathscr{D}$; il vient se placer après enroulement en M'.
La longueur du segment $[AM]$ sur $\mathscr{D}$ est alors égale à longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM'}$
Si $AM=x$, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM'}$ mesure aussi x unités et l'angle au centre correspondant $\widehat{AOM}$ mesure x radians.

Définition

1 radian est donc la mesure de l'angle au centre d'un arc de cercle de longueur 1 unité.

Remarque : quand on fait un tour de cercle complet de longueur 2π (périmètre du cercle), l'angle au centre correspondant mesure donc **2π radians**.
Par conséquent, on a la correspondance : 360˚= 2π radians.

Angle en ˚	0˚	30deg	45˚	60˚	90˚
Angle en radians	0 rad	$\dfrac{\pi}{6}$ rad	$\dfrac{\pi}{4}$ rad	$\dfrac{\pi}{3}$ rad	$\dfrac{\pi}{2}$ rad

Remarques :

- la droite $\mathscr{D}$ étant illimitée, quand on l'enroule autour du cercle, elle décrit une infinité de tours de cercle.
- Tous les points de $\mathscr{D}$ espacés d'une longueur égale à 2π se retrouvent au même endroit sur le cercle trigonométrique ; à un même point du cercle trigonométrique correspond donc une infinité d'angles, deux mesures consécutives différant de 2π radians.

VII.2 Cosinus et sinus d'un angle x

Soit M un point du cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ et soit x une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$.

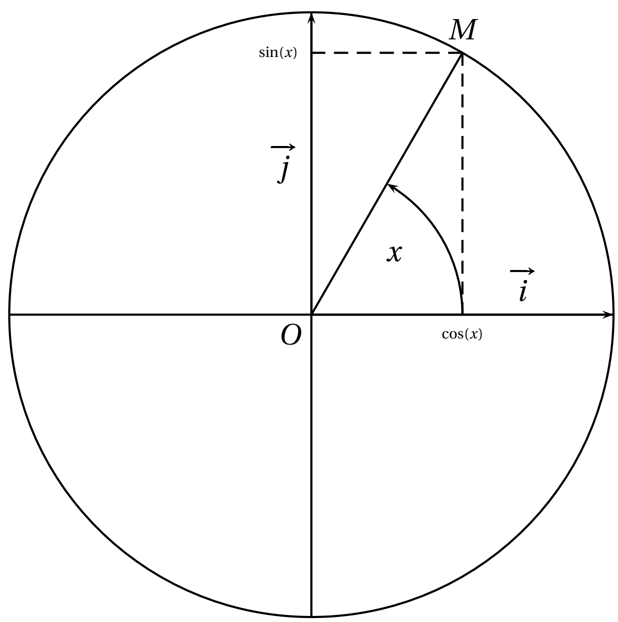
Définition

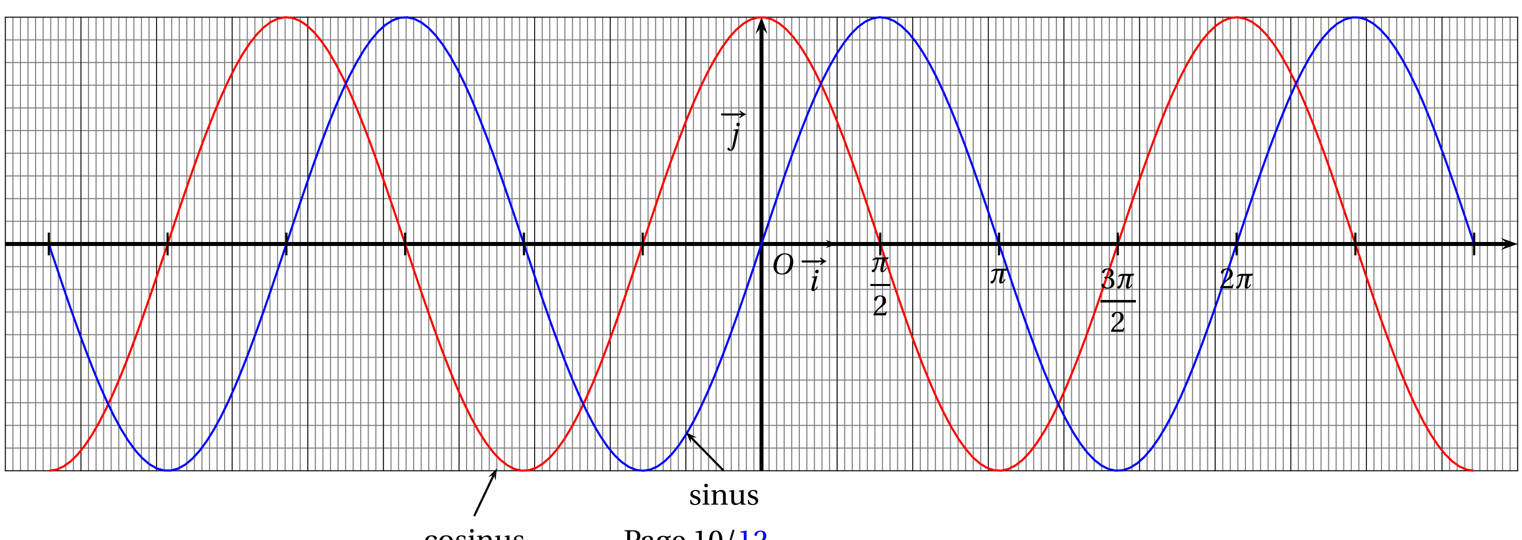
On appelle cosinus de x et sinus de x les coordonnées du point M dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.
On note : $M\,(\cos(x)\,;\,\sin(x))$

Remarques :

¿ chaque point M du cercle correspondent plusieurs angles ; en effet, quand on enroule la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$, des points viennent se superposer, espacés d'une longueur sur la droite de 2π ; les angles diffèrent donc de 2π.
Si x est une mesure de l'angle en radians, $x+2\pi$ aussi et plus généralement $x+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

On écrit souvent $\cos x$ et $\sin x$ à la place de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
On a donc $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$ pour tout x réel.
On dit que les fonctions cos et sin sont périodiques, de période 2π.





VII.3 Dérivée de $\cos(u)$ et de $\sin(u)$

On a : $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$ et $(\sin(u))' = u' \cos(u)$.

Exemples :

1. $f(x) = \cos(2x+3)$; $f = \cos(u)$ avec $u(x) = 2x+3$.
   $f' = -u' \sin(u)$ avec $u'(x) = 2$ donc $f'(x) = -2\sin(2x+3)$.
2. $f(x) = \sin\left(x^2\right)$; $f = \sin(u)$ avec $u(x) = x^2$.
   $f' = u' \cos(u)$ avec $u'(x) = 2x$ donc $f'(x) = 2x\cos\left(x^2\right)$.

VII.4 Cercle trigonométrique