

Nombres complexes : forme algébrique

Table des matières

I Ensemble des nombres complexes	3
I.1 Nombre i	3
I.2 Forme algébrique	3
I.3 Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan	3
II Opérations sur les nombres complexes	4
II.1 Addition	4
II.2 Soustraction	4
II.3 Multiplication	4
II.4 Conjugué d'un nombre complexe	5
II.5 Inverse	5
II.6 Division	6
III Conjugué, module et opérations	6
III.1 Module	6
III.2 Conjugué et opérations	6
III.3 Modules et opérations	7
IV Équations du second degré	8
V Forme trigonométrique d'un nombre complexe	9
V.1 Rappel sur les coordonnées polaires d'un point	9
V.2 Argument d'un nombre complexe	9
V.3 Forme trigonométrique	10
V.4 Propriétés :	10

Introduction historique

En Italie, au XVI^e siècle, deux découvertes mathématiques vont être faites : la résolution des équations du troisième et du quatrième degré et l'invention des nombres complexes. Alors que de nombreux mathématiciens n'osent pas encore utiliser les nombres négatifs, Cardan et ses élèves écrivent des symboles tels que $\sqrt{-a}$, où a est un nombre réel strictement positif ; ils décrivent les règles permettant de calculer en utilisant ces nouveaux nombres appelés nombres « impossibles ».

L'équation du troisième degré $x^3 + ax = b$ (1) fut résolue à la Renaissance de la manière suivante.

Si l'on pose $x = u + v$, l'équation en x s'écrit comme une relation entre u et v :
 $(u + v)^3 + a(u + v) = b$, soit $u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) = b$.

Si l'on impose à uv d'être égal à $-\frac{a}{3}$, on aura alors à chercher u et v tels que :

$$\begin{cases} uv = -\frac{a}{3} \\ u^3 + v^3 = b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u^3 v^3 = -\left(\frac{a}{3}\right)^3 \\ u^3 + v^3 = b \end{cases}$$

Ainsi u^3 et v^3 ont-ils pour somme b et pour produit $-\left(\frac{a}{3}\right)^3$.

On les obtient donc comme solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 - bX - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0.$$

Par conséquent, si $b^2 + 4\left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$, on obtient :

$$u^3 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{2} ; v^3 = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4\left(\frac{a}{3}\right)^3}}{2}$$

et

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Cette formule porte le nom de Cardan, qui la publia en 1545.

1. Si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$ est positif, on démontre que l'équation (1) n'admet qu'une racine réelle, donnée par la formule (2).
2. Si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$, la formule de Cardan n'a plus de sens. (car elle contient la racine carrée d'un nombre négatif).

Cependant, on peut démontrer que, dans ce cas, l'équation (1) admet trois racines dans \mathbb{R} . (en étudiant la fonction $x \mapsto x^3 + ax - b$).

Le mathématicien Bombelli étudia l'exemple de l'équation : $x^3 - 15x = 4$ (donc $a = -15$; $b = 4$).

La formule de Cardan s'écrit ici :

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 5^4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 5^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Bombelli eut l'audace de traiter ces expressions en utilisant les règles de calcul ordinaire.

Par exemple, si l'on remarque que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3 \times 2 \times \sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

et que, de même $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$, on obtient bien une solution de l'équation initiale en écrivant alors :

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Ceci mettait en évidence dès 1572 que des quantités réelles pouvaient être représentées par des nombres en apparence « impossibles ».

Bombelli alla jusqu'à considérer l'ensemble des combinaisons linéaires de 1 , -1 , $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ à coefficients positifs et définit des opérations qui sont celles que nous utilisons aujourd'hui, en posant $i = \sqrt{-1}$, (notation du mathématicien suisse Euler, XVIIIe siècle).

Dès 1629, Girard pensa que toute équation de degré n admettait n racines, ce qui laisse supposer que l'ensemble des nombres complexes est un cadre adéquat à la résolution des équations. Gauss ne donna la démonstration de cette conjecture qu'un siècle plus tard (1799).

À la fin du XVIIIe siècle, les nombres complexes sont fréquemment utilisés, mais leur statut mathématique ne sera clarifié qu'au XIXe siècle par Gauss, puis par Cauchy.

I Ensemble des nombres complexes

Remarque : la notation $\sqrt{-1}$ n'est pas possible, car on devrait avoir $\sqrt{-1}^2 = -1$ et $\sqrt{-1}^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$.

I.1 Nombre i

Définition

On admet qu'il existe un nombre imaginaire (non réel) défini par $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes, noté \mathbb{C} , est l'ensemble des nombres $z = a + ib$, avec a et b réels.

I.2 Forme algébrique

Vocabulaire et définitions :

- L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels est appelée forme algébrique du nombre complexe $z = a + ib$.
- Dans ce cas, a est appelé la partie réelle de a et notée $\text{Re}(z)$ et b la partie imaginaire de z et notée $\text{Im}(z)$.
- z est réel si, et seulement si, $b = \text{Im}(z) = 0$
- z est imaginaire pur si, et seulement si, $a = \text{Re}(z) = 0$

I.3 Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan

Définition

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(0; \vec{u}; \vec{v})$. À chaque nombre complexe $z = x + iy$, on associe de manière unique le point $M(x; y)$ et réciproquement, à chaque point $M(x; y)$ correspond un unique nombre complexe $z = x + iy$.

Ce nombre est appelé affixe de z (affixe est un mot féminin)



Remarques :

Tous les points de l'axe des abscisses ($O; \vec{u}$) ont une affixe z dite réelle car $Im(z) = 0$.

Tous les points de l'axe des ordonnées ($O; \vec{v}$) ont une affixe z dite imaginaire pure car $Re(z) = 0$.

Le point O a pour affixe 0 qui est à la fois réel et imaginaire pur.

Lorsque l'on associe les nombres complexes aux points d'un plan du repère orthonormal direct ($O; \vec{u}; \vec{v}$), on dit que l'on travaille dans le **plan complexe**.

Exemples :

1. Représenter le point A d'affixe $-3 - i$.
2. Représenter le point B d'affixe 2.
3. Représenter le point C d'affixe $3i$.
4. Soit G le point d'affixe $3 + 2i$. Soit E le point tel que $\vec{CE} = \vec{OG}$. Quelle est l'affixe de \vec{CE} ?
5. Que remarque-t-on sur les affixes de deux points symétriques par rapport à O ?
6. Que remarque-t-on sur les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe ($O; \vec{u}$)?
7. Que remarque-t-on sur les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe ($O; \vec{v}$)?



Définition :

Deux nombres complexes sont dits égaux s'ils représentent le même point, c'est-à-dire s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

Remarque : un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes les deux nulles.

II Opérations sur les nombres complexes

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, x, y, x' et y' réels

II.1 Addition

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$$

Exemple : $(2 + 3i) + (5 + 7i) = 2 + 5 + 3i + 7i = \boxed{7 + 10i}$

II.2 Soustraction

$$z - z' = (x + iy) - (x' + iy') = x - x' + i(y - y')$$

II.3 Multiplication

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

En effet : $(x + iy)(x' + iy') = xx' + xiy' + iy'x + i^2yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$ (car $i^2 = -1$)

Exemple : Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = 7 + 2i$.

Alors $zz' = (2 + 3i)(7 + 2i) = 2 \times 7 + 3 \times 2i + 3i \times 7 + 3i \times 2i = 14 + 4i + 21i + 6i^2 = 14 + 25i - 6 = 14 - 6 + 25i = \boxed{8 + 25i}$
(car $i^2 = -1$).

II.4 Conjugué d'un nombre complexe



Définition :

On appelle conjugué de z et on le note \bar{z} le nombre défini par : $\bar{z} = x - iy$.

Exemples : $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$; $\overline{5 - 7i} = 5 + 7i$



Propriété

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\bar{z}} = z$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstration :

- La double conjugaison revient à effectuer deux fois de suite une symétrie par rapport à l'axe des réels, donc à ne rien changer.
- Pour démontrer une équivalence, on démontre les deux implications.
 - (a) On suppose z réel, donc $z = x + i \times 0$ avec $x \in \mathbb{R}$.
Alors : $\bar{z} = x + 0 \times i = x - 0 \times i = x = z$ donc $z = \bar{z}$.
 - (b) Réciproquement : on suppose que $z = \bar{z}$ avec $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
Alors : $\bar{z} = x - iy$ donc : $z = \bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, donc $z = x \in \mathbb{R}$.
- De même, si $z \in i\mathbb{R}$, $z = iy$, avec $y \in \mathbb{R}$, donc $\bar{z} = -iy = -z$.

Réciproquement : $z = x + iy$; si $\bar{z} = -z$, alors $\begin{cases} x = -x \\ y = y \end{cases} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

II.5 Inverse

$$\text{Si } z \neq 0, \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

$$\text{En effet : } \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 - (iy)^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Remarques : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = \bar{z}z = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.

On ne laisse pas de nombre complexe au dénominateur d'une fraction.

Exemple : $z = 2 + 3i$; $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$;

$$\bar{z} = \overline{2 + 3i} ; z\bar{z} = 2^2 + 3^2 = 13.$$

$$\text{Par conséquent : } \frac{1}{z} = \frac{2 - 3i}{13} = \boxed{\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i}.$$

II.6 Division

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} \text{ et on applique la méthode précédente d'où : } \frac{z}{z'} = \frac{\overline{z z'}}{\overline{z' z'}}$$

Exercices du livre n° 32, 33, 34, 35, 36, 38 page 282

III Conjugué, module et opérations

III.1 Module

Soit $M(z)$ un point d'affixe $z = x + iy$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.



Définition :

On appelle module de z , noté $|z|$ la distance OM .

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

En effet : $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$; or $x^2 + y^2 = z\bar{z}$.

III.2 Conjugué et opérations



Propriétés :

Soient deux nombres complexes z et z' .

a) $\overline{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

c) $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$

d) $\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

f) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

g) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

Démonstrations :

Ces propriétés se démontrent très simplement, de façon calculatoire.

a) « évident »

b) $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. $\overline{z + z'} = \overline{(x + x') + i(y + y')} = (x + x') - i(y + y') = (x - iy) + (x' - iy') = \bar{z} + \bar{z}'$

c) idem

d) $z z' = x^2 - y^2 + i(xy' + x'y)$ donc $\overline{z z'} = x^2 - y^2 - i(xy' + x'y)$

$$\bar{z} \bar{z}' = (x - iy)(x' - iy') = xx' - ix'y' - ix'y - yy' = x^2 - y^2 - i(xy' + x'y)$$

On a bien $\overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}'$.

e) Se démontre par récurrence :

- $n = 1$: $\overline{z^1} = \bar{z} = \bar{z}^1$

- Hérédité : on suppose que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour un entier n quelconque.

$$\text{Alors : } \overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$$

$$f) \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \text{ donc } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$$

$$\text{Or : } \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$$

$$\text{On a bien : } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\text{Autre façon : } z \times \frac{1}{z} = 1 \text{ donc } \overline{z \times \frac{1}{z}} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1 \text{ d'où } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

- g) évident en utilisant 4. et 5. avec $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.



Théorème :

Soit z un nombre complexe.

1. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
2. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

Démonstration :

1. • Supposons z réel. Alors $z = x + i0$, $x \in \mathbb{R}$ $\overline{z} = x - i0 = x = z$ donc $z = \overline{z}$.
• $z = \overline{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow 2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \in \mathbb{R}$.
2. • Supposons z imaginaire pur : $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$. Alors $\overline{z} = -iy = -z$ donc $z = -\overline{z}$.
• $z = -\overline{z} \Leftrightarrow x + iy = -(x - iy) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

III.3 Modules et opérations



Théorème

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

- Si $z = x + iy$ avec x et y réels, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ($z \neq 0$)
- Si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- Inégalité triangulaire ; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (mais on n'a pas égalité en général)

Les démonstrations sont simples : Soit M le point d'affixe z

- $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $|z| = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow M = 0 \Leftrightarrow z = 0$

- $|zz'|^2 = |xx' - yy' + i(xy' + x'y)|^2 = (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2 = x^2x'^2 + 2xyx'y' + y^2y'^2 + x^2y'^2 - 2xyx'y' + x'^2y^2 = x^2x'^2 + x^2y'^2 + x'^2y^2 + y^2y'^2$

$$(|z||z'|)^2 = |z|^2|z'|^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = x^2x'^2 + x^2y'^2 + x'^2y^2 + y^2y'^2.$$

Les deux expressions ont des carrés égaux et ce sont des nombres positifs, donc elles sont égales.

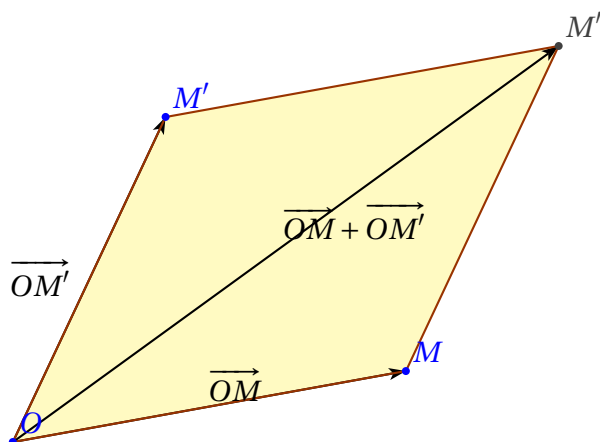
- Elle se démontre par récurrence (voir chapitre suivant).

- $\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \left|\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right|^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{|z|^2} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^2.$

Les deux expressions sont positives et ont le même carré, donc elles sont égales.

- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$ en appliquant la propriété précédente sur le module d'un produit et de l'inverse d'un nombre.

- Démonstration géométrique



Soient M et M' les points d'affixes respectives z et z' .

$z + z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$, où M'' est le quatrième point du parallélogramme, formé sur les deux vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$.

Alors : $|z + z'| = OM'' \leq OM + MM' = |z| + |z'|$ (car $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{OM'}$ donc $MM' = |z'|$)

IV Équations du second degré

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a , b et c réels.

En utilisant la forme canonique, cette équation s'écrit : $a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$, où $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a trois cas possibles :

- **Premier cas ; $\Delta > 0$**

On remarque que $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2$; on obtient une identité remarquable, on factorise et on trouve (situation

vue en Première) deux solutions **réelles** ; $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- **Deuxième cas : $\Delta = 0$**

On retrouve de même qu'il y a une solution **réelle** double : $z = -\frac{b}{2a}$.

• **Troisième cas : $\Delta < 0$**

Alors $\Delta = -(-\Delta) = i^2 \times (-\Delta) = (i\sqrt{-\Delta})^2$ car $\Delta > 0$;

on a alors $(i\sqrt{-\Delta})^2 = i^2 (\sqrt{-\Delta})^2 = (-1) \times (-\Delta) = \Delta$.

Par conséquent :

$$a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = a \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$$

$$= a \left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right).$$

Dans \mathbb{C} , un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

On obtient **deux solutions complexes conjuguées** : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ /

 **Résumé**

Solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $(a ; b ; c) \in \mathbb{R}^3$:

- Si $\Delta > 0$, on a deux solutions **réelles** : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution **réelle double** : $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, on a deux solutions **complexes conjuguées** : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

V Forme trigonométrique d'un nombre complexe

V.1 Rappel sur les coordonnées polaires d'un point

Soit $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ un repère orthonormal du plan complexe.

On note $[\rho ; \theta]$ les coordonnées polaires d'un point ; $\rho = OM$ et $\theta = (\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$ (angle orienté, défini à $2k\pi$ près).
Les coordonnées cartésiennes de M sont alors $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$.

V.2 Argument d'un nombre complexe

 **Définition :**

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on appelle argument de $z \neq 0$, noté $\arg(z)$ **toute** mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z .

 **Remarques :**

- Un nombre complexe a une infinité d'arguments, différents tous entre eux d'un multiple de 2π .
Autrement dit : $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ si θ est un des arguments.
- 0 n'a pas d'argument.

V.3 Forme trigonométrique

L'affixe de z est alors : $z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$.

$$\text{On a : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



Définition :

La forme trigonométrique de z est : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Remarque : la forme trigonométrique d'un nombre complexe est unique.

V.4 Propriétés :

a) Conjugué et opposé :



Propriété

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$

Démonstration : évident géométriquement, car les points d'affixes z et \bar{z} sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Multiplier l'affixe $z \neq 0$ d'un point revient à faire subir à ce point une symétrie de centre O ; l'argument augmente de $\pi [2\pi]$.

b) Propriétés algébriques :



Si z et z' sont des nombres complexes non nuls, alors :

1. $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0 [\pi]$
2. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$
3. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall z' \in \mathbb{C}^*, \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
4. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
5. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, \arg(z^n) = n \arg(z)$

Démonstration :

1. évident géométriquement : si $z \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arg(z) = 0 [2\pi]$ et si $z \in \mathbb{R}^{-*}$, $\arg(z) = \pi [2\pi]$ d'où le résultat. La réciproque est évidente.
2. facile (même méthode qu'au 1.)

3. Soient $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ écrits sous leurs formes trigonométriques.
 Alors : $zz' = rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = rr'(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta') = rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')) = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$.
 Donc $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.
4. Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$
 d'où $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.
5. $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$ et on utilise les propriétés précédentes.
6. démonstration par récurrence (facile à faire)