Correction du DST

I Amérique du sud novembre 2014

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Partie A : Conjecture

1. $u_1 = -\dfrac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}2^2 + 3\times 2 - \dfrac{3}{2} = -2+6-\dfrac{3}{2} = \boxed{\dfrac{5}{2}}$

   $u_2 = -\dfrac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 3\times\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{25}{8} + \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2} = \boxed{\dfrac{23}{8}}$

2. En programmant à la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}$, on obtient :

   $u_3 = f(u_2) = f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \dfrac{383}{128} \approx \boxed{2{,}992\,19}$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\dfrac{383}{128}\right) \approx \boxed{2{,}999\,97}$

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est **croissante** et qu'elle **converge vers 3**.

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2}$

   $v_n^2 = (u_n-3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$ donc $-\dfrac{1}{2}v_n^2 = -\dfrac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2} = v_{n+1}$

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $\boxed{v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2}$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

   - **Initialisation** : $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$; la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant v_p \leqslant 0$.

     On sait que, pour tout p, $v_{p+1} = -\dfrac{1}{2}v_p^2$.

     $-1 \leqslant v_p \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant v_p^2 \leqslant 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2}v_p^2 \leqslant 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$

     Donc $-1 \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\boxed{-1 \leqslant v_n \leqslant 0}$

3. (a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{2}v_n^2 - v_n = \boxed{-v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)}$

   (b) Pour tout n, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.

   Pour tout n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n \leqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n + 1 \leqslant 1$; donc $\dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

   $$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

   Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est **croissante**.

4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) est **convergente**.

5. On note ℓ limite de la suite (v_n). On admet que $\ell \in]-1\,;\,0[$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2$.

   On résout l'équation $x = -\dfrac{1}{2}x^2$ dont ℓ est solution :

   $x = -\dfrac{1}{2}x^2 \iff 2x + x^2 = 0 \iff x(2+x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

   Mais on sait que $\ell \in]-1\,;0[$ donc ne peut pas correspondre à $x = -2$.

   Donc $\ell = 0$ et $\boxed{\text{la limite de la suite } (v_n) \text{ est } 0.}$

6. La suite (v_n) est croissante et, pour tout n, $u_n = v_n + 3$; donc on peut dire que la suite (u_n) est **croissante**.

   La suite (v_n) est convergente vers 0 donc, d'après les théorèmes sur les limites, on peut dire que la suite (u_n) est $\boxed{\text{convergente vers } 3}$.

   Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc validées.

II Nouvelle Calédonie novembre 2014

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty]$ par $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x+2}$.

1. $f'(x) = 0 - \dfrac{0(x+2) - 4\times 1}{(x+2)^2} = \boxed{\dfrac{4}{(x+2)^2} > 0}$ sur $]0\,;+\infty]$.

   Donc la fonction f est **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty]$.

2. On résout dans $]0\,;+\infty]$ l'équation $f(x) = x$:

   $$f(x) = x \iff 5 - \frac{4}{x+2} = x \iff \frac{5(x+2) - 4 - x(x+2)}{x+2} = 0 \iff \frac{5x + 10 - 4 - x^2 - 2x}{x+2} = 0$$

   $$\iff \frac{-x^2 + 3x + 6}{x+2} = 0 \iff -x^2 + 3x + 6 = 0 \text{ et } x + 2 \neq 0$$

   On résout $-x^2 + 3x + 6 = 0$; $\Delta = 9 - 4\times 6 \times(-1) = 33 > 0$.

   Les solutions sont donc $\boxed{\dfrac{-3-\sqrt{33}}{-2} = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}}$ et $\boxed{\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}}$.

   Cette deuxième solution est négative donc l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0\,;+\infty]$ est $\boxed{\alpha = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4{,}37}$.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Sur la figure de **annexe 1**, on place les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

   On peut conjecturer que la suite (u_n) est **croissante et converge vers α**.

4. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

   - **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_1 = f(u_0) = 5 - \dfrac{4}{1+2} = \dfrac{11}{3}$; de plus $\alpha \approx 4{,}37$.

     On a $0 \leqslant 1 \leqslant \dfrac{11}{3} \leqslant \alpha$ ce qui veut dire que la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, autrement dit : $0 \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant \alpha$.

     On sait d'après la question **1.** que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty]$; donc :

     $0 \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant \alpha \Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_p) \leqslant f(u_{p+1}) \leqslant f(\alpha)$

     $f(0) = 3 \geqslant 0$, $f(u_p) = u_{p+1}$ et $f(u_{p+1}) = u_{p+2}$.

     De plus, α est solution de l'équation $f(x) = x$ donc $f(\alpha) = \alpha$.

     On a donc $0 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant \alpha$; on peut dire que la propriété est vraie au rang $p+1$.

- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

(b) Pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est **croissante**.
Pour tout n, $u_n \leqslant \alpha$ donc la suite (u_n) est **majorée** par α.
Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est **convergente**.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 +]ots + u_n$.

(a) $S_0 = u_0 = 1$; $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \frac{11}{3} = \boxed{\frac{14}{3} \approx 4,67}$

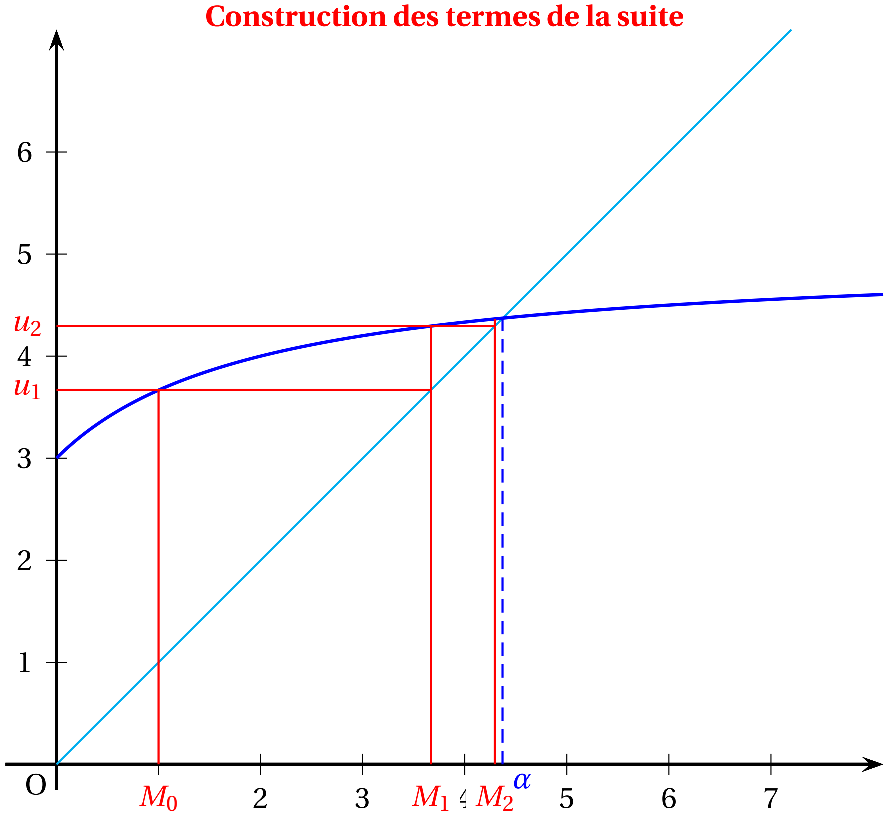
$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2$; $u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{73}{17}$ donc $S_2 = \frac{14}{3} + \frac{73}{17} = \boxed{\frac{457}{51} \approx 8,96}$ donc $S_2 \approx 8,96$.

(b) On complète l'algorithme donné en annexe 2 pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

(c) On sait que la suite (u_n) est croissante donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$.
Or $u_0 = 1$, donc, pour tout n, $u_n \geqslant 1$ et donc $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \geqslant n + 1$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$ donc, d'après les théorèmes de comparaison sur les limites :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$$

Construction des termes de la suite



Algorithme

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que $i < n$
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur $5 - \dfrac{4}{u+2}$
	Affecter à s la valeur $s+u$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s

III Pondichéry avril 2015

Partie A

1. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{b}{1-a} = au_n + b - \dfrac{b}{1-a} =$ $au_n + \dfrac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - a\dfrac{b}{1-a} = a\left[u_n - \dfrac{b}{1-a}\right] = \boxed{av_n}$.
   L'égalité $v_{n+1} = av_n$, vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) est **géométrique** de raison a.
2. On sait que $v_n = v_0 \times a^n$; donc si $a \in]-1\,;\,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, donc
   $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \dfrac{b}{1-a} = 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-a}}$.

Partie B

1. Après la taille la plante mesure $80 \times \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = 80 \times \dfrac{3}{4} = \boxed{60 \text{ (cm)}}$.
   Au bout de 1 an elle a poussé de 30 cm ; elle mesurera donc en mars 2016 avant la tailles $60+30 = \boxed{90 \text{ cm}}$.
2. (a) D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par $\dfrac{3}{4} = 0,75$ et la pousse annuelle est de 30 cm, donc :
   pour tout n, $\boxed{h_{n+1} = 0,75h_n + 30}$.
   (b) Mars 2015 correspondant à $n = 0$, on a : $h_0 = 80$; $h_1 = 90$,
   $h_2 = 0,75 \times 90 + 30 = 67,5 + 30 = \boxed{97,5}$: la suite **semble être croissante**. Démontrons cette conjecture par récurrence :
   Initialisation : on sait déjà que $h_0 < h_1$;
   Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $h_p < h_{p+1}$, alors
   $0,75h_p < 0,75h_{p+1} \iff 0,75h_p + 30 < 0,75h_{p+1} + 30 \iff h_{p+1} < h_{p+2}$: l'hérédité est démontrée, donc la suite (h_n) est **croissante**.
   (c) On utilise le résultat de la partie A avec la suite (h_n) et les coefficients $a = 0,75$ et b = 30.
   Comme $-1 < 0,75 < 1$, la suite (h_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{30}{1-0,75} = \dfrac{30}{0,25} = \boxed{120}$.