Correction des exercices sur la loi binomiale

I

Une compagnie bancaire propose des placements sous forme de produits financiers. La banque constate que le produit de type A a intéressé 10 % de sa clientèle, par le passé.
Un sondage est effectué auprès d'un échantillon de 10 clients.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de clients dans l'échantillon ayant choisi le produit A.

a) On é répétition de 10 épreuves identiques à deux issues, les épreuves étant indépendantes les unes des autres.
X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n=10\,;\; p=0,1)$.

b) $p(X \geqslant 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(>\leqslant 1) \approx \boxed{0,26}$ (se calcule directement à la calculatrice : $1 - \text{BinomFRep}(10, 0.1, 1)$)

c) $p_{(X\geqslant 2)}(X<5) = \dfrac{p((X \geqslant 2) \cap (X<5))}{p(X \geqslant 2)} \approx \boxed{0,99}$

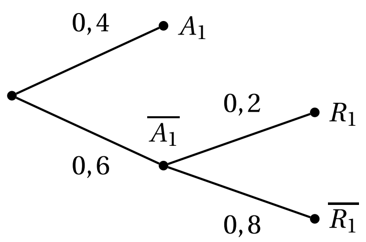
II Sondages (France septembre 2000)

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4.
Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

a) On note :

- A_1 l'événement « La personne est absente lors du premier appel » ;
- R_1 l'événement « La personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Résumons la situation par un arbre :

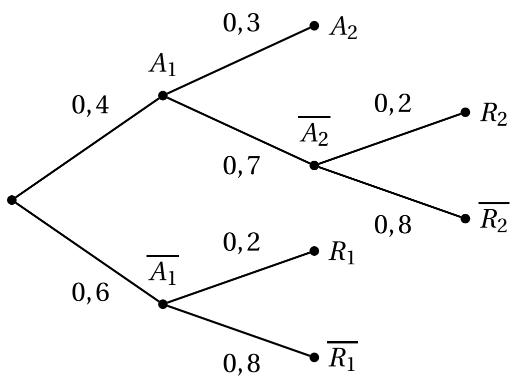


$p(R_1) = p\left(R_1 \cap \overline{A_1}\right) = p_{\overline{A_1}}(R_1) \times p\left(\overline{A_1}\right) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$

b) Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente et alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.
Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
On note :

- A_2 l'événement « La personne est absente lors du second appel » ;
- R_2 l'événement « La personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel ;
- R l'événement « La personne accepte de répondre au questionnaire ».

Arbre correspondant :



$p(R) = p(R_1) + p(R_2) = 0,12 + 0,2 \times 0,7 \times 0,4 = 0,12 + 0,056 = \boxed{0,176}$

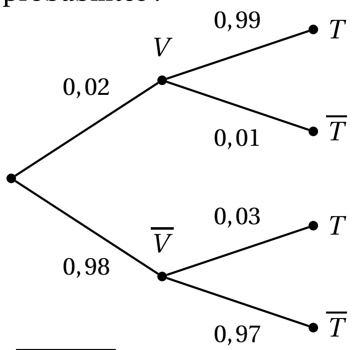
c) $p_R(R_1) = \dfrac{0,12}{0,176} \approx 0,68.$

d) On note X le ombre de personnes ayant accepté de répondre.
On a répétition de 20 épreuves identiques indépendantes à deux issues.
X suit donc la loi binomiale de paramètres 20 et 0,176 ; $X \hookrightarrow \mathscr{B}(; ,)$.
Pour tout $k \leqslant 20$, $p(X=k)=\binom{20}{k} 0,176^{k} \times (1-0,176)^{20-k}$
$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1-(1-0,176)^{20} \approx \boxed{0,98}$

III Métropole juin 2011

PARTIE A

1. (a) D'après l'énoncé, on a : $\boxed{P(V)=0,02}$; $\boxed{P_V(T)=0,99}$; $\boxed{P_{\overline{V}}(\overline{T})=0,97}$.
Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



(b) $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0,99 \times 0,02 = \boxed{0{,}0198}$

2. Par conséquent : $P(V) = P(V \cap T) + P\left(V \cap \overline{T}\right) = P_T(V) \times p(T) + P_{\overline{V}}(T) \times P\left(\overline{V}\right)$ (formule des probabilités conditionnelles).
Alors : $P(T) = 0,99 \times 0,02 + 0,03 \times 0,98 = \boxed{0{,}0492}$.

3. (a) Il faut calculer $P_T(V)$. Or : $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0198}{0{,}0492} \approx 0,402$, soit environ 40%.
Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif.

(b) La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est $P_{(T)}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,97 \times 0,98}{1-0{,}0492} \approx 0{,}9997$, c'est-à-dire environ $\boxed{99{,}97\%}$.

PARTIE B

1. On a répétition de 10 épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,02)$.

2. Pour tout k, $(0 \leqslant k \leqslant 10)$, on a $P(X=k) = \binom{10}{k} \times 0,02^{k} \times (1-0,02)^{10-k}$.
Alors : $P(X \geqslant 2) = 1-(P(X<2)) = 1-[P(X=0)+P(X=1)] = 1-\left[0{,}98^{10} + 10 \times 0,02 \times 0{,}98^{9}\right] \approx \boxed{0,016}$