Correction

I Liban mai 2015

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

1. $\boxed{u_0 = \ln 2}$
2. (a) Pour tout n,
$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1} + x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$
en ulilisant la linéarité et en factorisant.

   (b) On en déduit $\boxed{u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2}$.
3. (a)

Initialisation	Affecter à u la valeur $\ln 2$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $\frac{1}{i} + u$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (b) On peut conjecturer que la suite est décroissante .
4. (a) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ car $x^n \geqslant 0$, $1+x \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$ sur $[0\,;1]$ (positivité de l'intégrale).
La suite est donc décroisssante.

   (b) La suite est décroissante, minorée donc convergente.
5. On appelle la limite de la suite ℓ. « En passant à la limite »dans l'égalité : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$, on obtient $2\ell = 0$ donc $\boxed{\ell = 0}$.

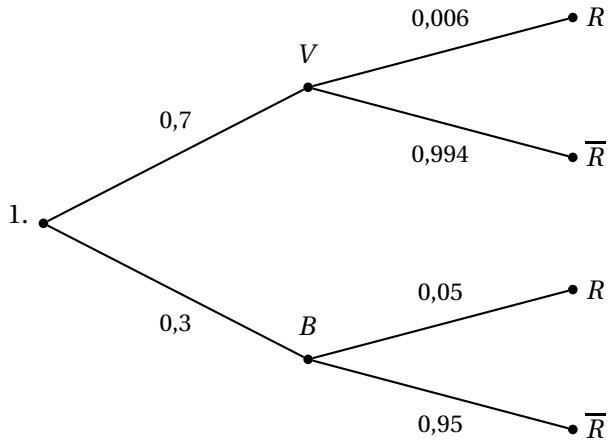
II Liban mai 2015

1. La tangente en 1 est bien la droite d'équation $y = \mathrm{e}x$; il suffit d'écrire l'équation de la tangente.
2. On conjecture qu'il y a :
   - 0 point d'intersection pour $0 \leqslant$ ù $< \mathrm{e}$.
   - 1 point d'intersection pour $m = \mathrm{e}$.
   - 2 points d'intersection pour $m = \mathrm{e}$
3. **Démonstration** : il faut considérer l'équation $f(x) = mx \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = mx \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - mx = 0$.
On étudie alors la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - mx = 0$.
   - $g'(x) = \mathrm{e}^x - m$ qui s'annule en $\ln(m)$.
   - $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant \ln(m)$ et $g'(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant \ln(m)$.
   - **Limites** : facile en $-\infty$ et en faisant apparaître $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ en $+\infty$.
   - **Tableau de variation** :

x	$-\infty$		$\ln(m)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$m(1-\ln(m))$	↗	$+\infty$

III Liban mai 2014

Partie A



2. D'après l'arbre ci-dessus $p(V \cap R) = 0{,}7 \times 0{,}006 = \boxed{0{,}0042}$.
3. D'après l'arbre ci-dessus, la probabilité de l'évènement R est
$$p(R) = p(V \cap R) + p(B \cap R) = 0{,}0042 + 0{,}3 \times 0{,}05 = \boxed{0{,}0192}$$
4. On cherche à déterminer $p_R(B)$:
$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}05}{0{,}0192} = \boxed{0{,}78125}$$

Partie B : le vélo

1. Cela revient à calculer $p(15 \leqslant T \leqslant 20)$. À la calculatrice, nous obtenons, $p(15 \leqslant T \leqslant 20) = \boxed{0{,}946}$
2. Il sera en retard au lycée s'il met plus de 20 minutes pour effectuer le trajet. On cherche donc la probabilité de l'évènement « $T \geqslant 20$ ». À la calculatrice, nous obtenons
$$p(T \geqslant 20) = \boxed{0{,}0062}$$

3. On cherche la durée maximale de son temps de parcours T_0 (en minutes) tel que $p(T \leqslant T_0) = 0{,}9$. À la calculatrice, nous obtenons

$$p(T \leqslant 18{,}5379) = \boxed{0{,}9}$$

Ce qui signifie qu'il a une probabilité de 0,9 de mettre moins de 18 minutes et 30 secondes (environ). Il peut donc partir au plus tard à 8 heures moins 18 minutes et 30 secondes, soit à 7 h 41 minutes et 30 secondes.

À une minute près, il peut partir au maximum à 7 h 41, de sorte à avoir une probabilité d'arriver à l'heure de 0,9

Partie C : le bus

1. D'après le cours Z' suit une loi normale centrée-réduite.

2. Puisque $p\left(T' \geqslant 20\right) = 0{,}05$, il vient

$$p\left(\frac{T'-15}{\sigma'} \geqslant \frac{20-15}{\sigma'}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow p\left(Z' \geqslant \frac{5}{\sigma'}\right) = 0{,}05$$

À la calculatrice, en considérant une loi normale centrée-réduite Z', on trouve que

$$p\left(Z' \geqslant 1{,}6449\right) = \boxed{0{,}05}$$

D'où

$$\frac{5}{\sigma'} = 1{,}6449$$

et donc

$$\boxed{\sigma' = \frac{5}{1{,}6449} = 3{,}04} \quad \text{à} \quad 0{,}01 \quad \text{près}$$

IV Amérique du Nord mai 2014

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc **sécantes** ; on appelle L leur point d'intersection.
2. (a) Les droites (LN), (BF) et (CG) sont **coplanaires** dans le plan (BCG) d'où les constructions de T et Q.

   (b) On cherche l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

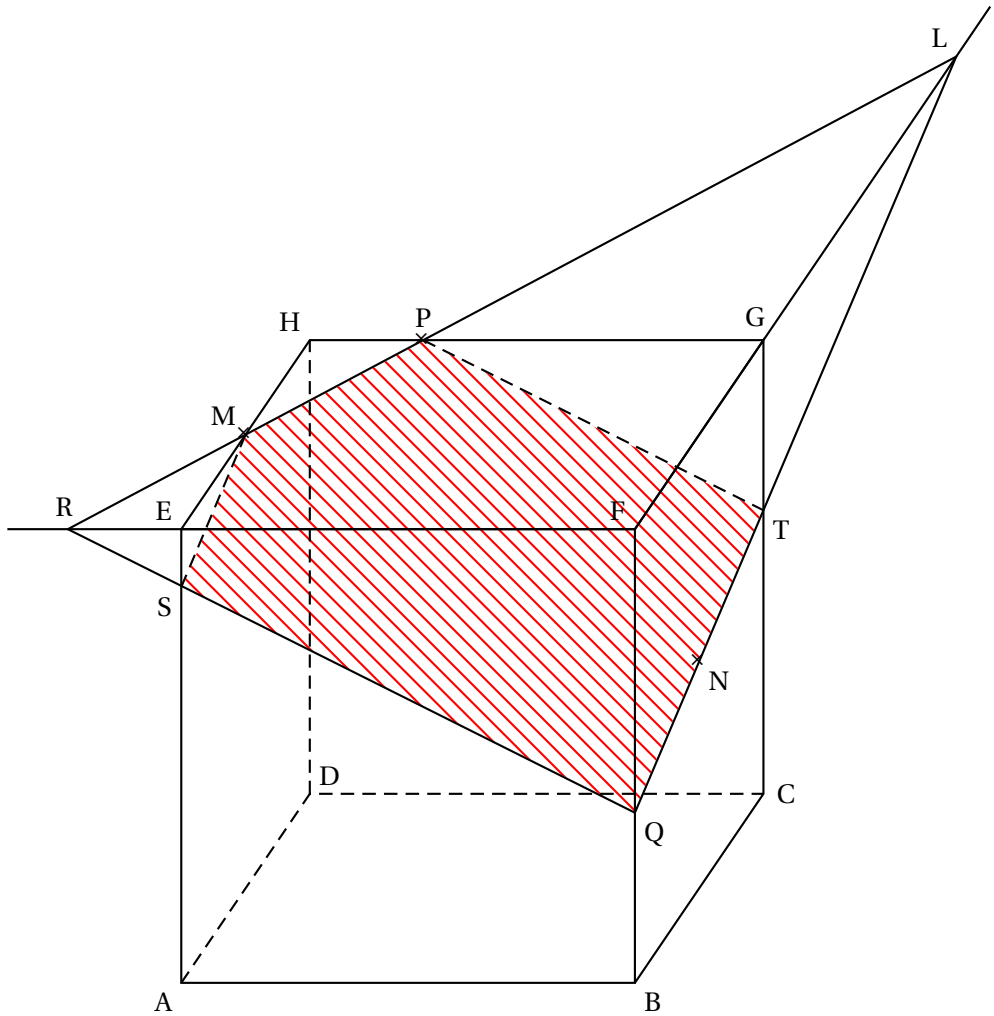
$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} L \in (MP) \Longrightarrow L \in (MNP) \\ N \in (MNP) \end{array}\right\} \Longrightarrow (LN) \subset (MNP) \\ Q \in (LN) \end{array}\right\} \Longrightarrow Q \in (MNP) \\ Q \in [BF] \Longrightarrow Q \in (ABF) \end{array}\right\} \Longrightarrow Q \in (MNP) \cap (ABF)$$

Les droites (MP) et (EF) du plan (EFG) ne sont pas parallèles, donc elles sont **sécantes** ; on appelle R leur point d'intersection.

$$\left.\begin{array}{r} R \in (MP) \Longrightarrow R \in (MNP) \\ R \in (EF) \Longrightarrow R \in (ABF) \end{array}\right\} \Longrightarrow R \in (MNP) \cap (ABF)$$

Les plans (MNP) et (ABF) ont deux points en commun, Q et R ; ils ne sont pas confondus car $P \in (MNP)$ et $P \notin (ABF)$.

Ces deux plans sont donc sécants et comme Q et R appartiennent aux deux plans, l'intersection des deux plans (MNP) et (ABF) est la droite $\boxed{(QR)}$.



3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).
   La section du cube par le plan (MNP) est le $\boxed{\text{pentagone } MPTQS}$.

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.
On a $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$ et $H(0\,;\,1\,;\,1)$.

1. M est le milieu du segment $[EH]$ donc M a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+0}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+1}{2}\right)=\boxed{\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)}$;

   N est le milieu du segment $[FC]$ donc n a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+1}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+0}{2}\right)=\boxed{\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)}$;

   $P(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie $\overrightarrow{HP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{HG}$, on a donc : $\begin{cases} x-0=\dfrac{1}{4} \\ y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ Donc $\boxed{P\left(\dfrac{1}{4}\,;1\,;1\right)}$.

2. Pour calculer les coordonnées du point L, on écrit les systèmes de représentations paramétriques des droites (MP) et (FG).
   (MP) passe par $M\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MP}\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$.

   Une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}k \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}k \\ z=1 \end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$

   (FG) passe par $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = k' \quad \text{où } k' \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}}$

On détermine l'intersection de ces deux droites :

$$\begin{cases} \frac{1}{4}k & = 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k & = k' \\ 1 & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k & = 4 \\ k' & = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Donc le point L a pour coordonnées $\boxed{\left(1\,;\,\frac{5}{2}\,;\,1\right)}$.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.

   On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{TP}.\overrightarrow{TN}$

$$\overrightarrow{TP}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}.\overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = -\frac{3}{4} \times 0 + 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8} \times \left(-\frac{1}{8}\right) \neq 0$$

   Le triangle TPN n'est **pas** rectangle en T.