Correction

I

1. $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right).\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{DA}$ car $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BJ}\perp\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}=0$ et $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AI}=0$. D'autre part : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{DA}=AB\times BI+(-BJ\times DA)=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2}{2}=0$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens, alors que $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires de sens contraires.
   Par conséquent : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI}=0$ et $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont orthogonaux.
2. On en déduit que les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires, donc que l'angle $\widehat{QPS}$ est droit.
   On montrerait de même que les angles $\widehat{PSR}$et $\widehat{SRQ}$ sont droits. Un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle, donc $PQRS$ est un rectangle.
3. $\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{ID}$ car le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AL}$ sur (ID) est $\overrightarrow{PS}$.
   $\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{AD}$ car le projeté orthogonal de $\overrightarrow{ID}$ sur (AL) est $\overrightarrow{AD}$.
   Par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{AD}}$.
4. $\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{ID}=PS\times ID$ (vecteurs colinéaires de même sens) ; $\overrightarrow{AL}.\overrightarrow{AD}=AL\times AD$ (idem).
   Par conséquent : $PS\times ID=AL\times AD$.
   D'après le théorème de Pythagore, on a : $ID^2=AD^2+AJ^2=a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{5a^2}{4}$ d'où $ID=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
   Alors : $PS=\dfrac{AL\times AD}{ID}=\dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$: $\boxed{PS=\dfrac{a}{\sqrt{5}}}$.
5. On montrerait de même que les autres côtés de $PQRS$ ont la même longueur ; un rectangle qui a ses côté de même longueur est un carré donc $PQRS$ est un carré.
   L'aire de $PQRS$ vaut : $\mathscr{A}(PQRS)=\left(\dfrac{a}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{a^2}{5}=\dfrac{1}{5}a^2$ donc $\boxed{\mathscr{A}(PQRS)=\dfrac{1}{5}\mathscr{A}(ABCD)}$.

II

1. $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}=BI\times BD\cos\left(\overrightarrow{BI}\,;\,\overrightarrow{BD}\right)=BI\times BD\cos\theta$.
   $BI=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ (voir exercice 1) et $BD=a\sqrt{2}$ (résultat à savoir).
   Par conséquent : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\times a\sqrt{2}\cos\theta=\boxed{\left(\dfrac{a^2}{2}\sqrt{10}\right)\cos\theta}$.
2. $\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)$ donc $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2$ (car le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BD}$ sur (BA) est $\overrightarrow{BA}$).
   Alors : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}(a\sqrt{2})^2=\boxed{\dfrac{3}{2}a^2}$.
3. On a exprimé le même produit scalaire de deux façons différentes, donc :
   $\left(\dfrac{a^2}{2}\sqrt{10}\right)\cos\theta=\dfrac{3}{2}a^2$ d'où $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ (résultat qui ne dépend pas de a, donc θ ne dépend pas de la taille du carré).
4. Avec une calculatrice, on trouve : $\theta\approx 18{,}43$ ° à $0{,}01$ ° par défaut.

III

1. B appartient au cercle de diamètre $[AA']$ donc le triangle $BA'A$ est rectangle en B.
   B est donc le projetée orthogonal de A' sur (MB).
   On en déduit que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$.
2. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'}\right)=MO^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}=MO^2+\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}\right)-OA^2=MO^2-OA^2=MO^2-R^2$
   (car $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PA'}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires de sens contraire).
   Par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MO^2-R^2}$.
3. On montrerait de même que : $\boxed{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=MO^2-R^2}$.
   On en déduit que : $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=MO^2-R^2}$.