Correction des exercices de bac

I Pondichéry avril 2015

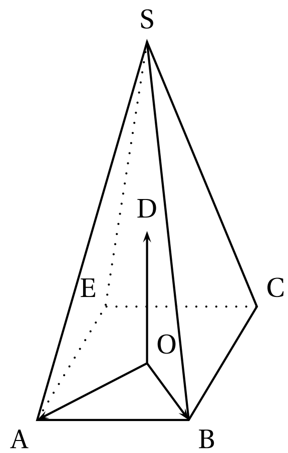
Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $\mathrm{M}\left(1\,;\,1\,;\,\frac{3}{4}\right)$, $\mathrm{N}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $\mathrm{P}\left(1\,;\,0\,;\,-\frac{5}{4}\right)$.

1. Voir la figure à la fin.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$.
   $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\left(-1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\,(0\,;\,-1\,;\,-2)$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.
3. (a) $-1\times 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1)+\left(\frac{1}{4}\right)\times(-2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$
   (b) L'algorithme 1 calcule le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}=0$, donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.
4.
5. On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\,(5\,;\,-8\,;\,4)$ normal au plan (MNP).
   (a) Si n est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est :
   $5x-8y+4z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$;
   $\mathrm{N}\in(\mathrm{MNP}) \iff -8\times\frac{1}{2}+4\times 1=d= \iff 0=d$
   Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc $5x-8y+4z=0$.
   (b) On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
   On traduit la relation vectorielle : $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \overrightarrow{\mathrm{F}M}=t\overrightarrow{n}, t\in\mathbb{R}$ soit
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 5t\\ y-0 &=& -8t\\ z-1 &=& 4t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+5t\\ y &=& -8t\\ z &=& 1+4t\end{array}\right.$$
6. (a) Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de Δ, soit :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 5x-8y+4z &=& 0\\ x &=& 1+5t\\ y &=& -8t\\ z &=& 1+4t\end{array}\right. \mathbb{R}ightarrow 5(1+$$
   $5t)-8\times(-8t)+4(1+4t)=0 \iff 105t+9=0 \iff t=-\frac{9}{105} \iff t=-\frac{3}{35}$.
   D'où $x=1+5\times\left(-\frac{3}{35}\right)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$;
   $y=-8\times\left(-\frac{3}{35}\right)=\frac{24}{35}$;
   $z=1+4\times\left(-\frac{3}{35}\right)=1-\frac{12}{35}=\frac{23}{35}$.
   Donc $\mathrm{F}\left(\frac{4}{7}\,;\,\frac{24}{35}\,;\,\frac{23}{35}\right)$.
   (b) Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP, [FK] est hauteur du tétraèdre MNPF, donc
   $V_{\mathrm{MNPF}}=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}(\mathrm{MNP}\times\mathrm{FK})$.
   Or MNP est rectangle en M, donc $\mathscr{A}(\mathrm{MNP}=\frac{\mathrm{MN}\times\mathrm{MP}}{2}$.
   $\mathrm{MN}^2=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{21}{16}\mathbb{R}ightarrow\mathrm{MN}=\frac{\sqrt{21}}{4}$;
   $\mathrm{MP}^2=1+4=5\mathbb{R}ightarrow\mathrm{MP}=\sqrt{5}$;
   Donc $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{4}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{27}{35}}=\frac{1}{24}\times\sqrt{\frac{21\times 27}{35}}\times\sqrt{5}=$
   $\frac{1}{24}\times\sqrt{\frac{81}{5}}\times\sqrt{5}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

II Amérique du Nord juin 2015

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées (0 ; 0 ; 3) dans ce repère.



Partie A

1. Voir figure.
2. Compte tenu de la configuration, les plans (AEU) et (SBC) sont sécants selon la droite (UV). (Les points U et V appartiennent aux deux plans sécants considérés).
   Dans le plan (AEU) nous avons la droite (EA) ; dans le plan (SBC) nous avons la droite (BC). Comme ABCE est un carré les droites (EA) et (BC) sont parallèles.
   Donc d'après le théorème du toit la droite d'intersection (UV) des deux plans est parallèles à (EA) et à (BC).

3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\ ;\ -\frac{1}{6}\ ;\ 0\right)$.

   En appliquant le théorème de Thalès, on a $\overrightarrow{\text{DU}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{OB}}$. ON en déduit que les coordonnées de D sont $U\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 0\right)$ car $\overrightarrow{\text{OU}} = \overrightarrow{\text{OD}} + \overrightarrow{\text{DU}} = 0\times\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{OB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{OD}}$.

   Alors $\overrightarrow{\text{KU}}\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\ \frac{5}{6}\\ 1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{\text{EA}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

   Alors : $\overrightarrow{\text{KU}}.\overrightarrow{\text{EA}} = 0$ donc $KU \perp \overrightarrow{\text{EA}}$

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.
   On vérifie que les coordonnées de E, A et U vérifient l'équation du plan, donc c'est une équation de ce plan.

2. Un vecteur normal au plan (EAU) est $\vec{\text{n}}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$.

   C'est un vecteur directeur de (d). Une représentation paramétrique de (d) est
   $$\left\{\begin{array}{l} x = 3t\\ y = -3t \qquad, t\in\mathbb{R}\\ z = 3+5t\end{array}\right.$$

3. On résout le système.
   On trouve $t = -\frac{12}{43}$ d'où $h\left(-\frac{36}{43}\ ;\ \frac{36}{43}\ ;\ \frac{69}{43}\right)$.

4. On calcule le volume v_1 de la pyramide SABCD : on trouve $v_1 = 2$.

   Le volume v_2 de SAUVE est $v_2 = \frac{10}{9} \neq \frac{1}{2}v_1$.

III Polynésie juin 2015

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\2\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG). $\overrightarrow{\text{AI}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\text{AB}} \iff \overrightarrow{\text{AB}} = 6\overrightarrow{\text{AI}} \iff$ B(6 ; 0 ; 0) ;
   $\overrightarrow{\text{AJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}} \iff \overrightarrow{\text{AD}} = 4\overrightarrow{\text{AJ}} \iff$ D(0 ; 4 ; 0) ;
   $\overrightarrow{\text{AK}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AE}} \iff \overrightarrow{\text{AE}} = 2\overrightarrow{\text{AK}} \iff$ K(0 ; 0 ; 2).
   Comme $\overrightarrow{\text{AG}} = \overrightarrow{\text{AC}} + \overrightarrow{\text{CG}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}} = 6\overrightarrow{\text{AI}} + 4\overrightarrow{\text{AJ}} + 2\overrightarrow{\text{AK}}$, donc G(6 ; 4 ; 2). On en déduit que $\overrightarrow{\text{IG}}(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{\text{JG}}(6\ ;\ 3\ ;\ 2)$.

   Or $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{IG}} = -2+2+0 = 0$ et
   $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{JG}} = 12+6-18 = 0$.

   Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (IJG) est normal à ce plan.

2. On sait qu'alors une équation du plan (IJG) est :
   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{IJG}) \iff 2x+2y-9z+d = 0$.

   En particulier : I(1 ; 0 ; 0) ∈ (IJG) $\iff 2+0-0+d = 0 \iff d = -2$.

   Une équation du plan (IJG) est : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{IJG}) \iff 2x+2y-9z-2 = 0$.

3. On a $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{BF}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AE}}$, donc F(6 ; 0 ; 2).

   Or $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{BF}) \iff$ il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{B}M} = t\overrightarrow{\text{BF}} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-6 &=& t(6-6)\\ y-0 &=& t(0-0)\\ z-0 &=& t(2-0)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 6\\ y &=& 0\\ z &=& 2t\end{array}\right.$

   Donc si $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{IJG}) \cap (\text{BF})$ ses coordonnées vérifient le système :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 6\\ y &=& 0\\ z &=& 2t\\ 2x+2y-9z-2 &=& 0\end{array}\right. \mathbb{R}ightarrow 2\times 6+0-9\times 2t-2 = 0 \iff 10-18t = 0 \iff 10 = 18t \iff t = \frac{5}{9}$.

   En remplaçant t par $\frac{5}{9}$ dans l'équation de la droite (BF), on obtient :

   $\text{L}\left(6\ ;\ 0\ ;\ \frac{10}{9}\right)$.

4. La section avec (ABCD) est la droite (IJ).

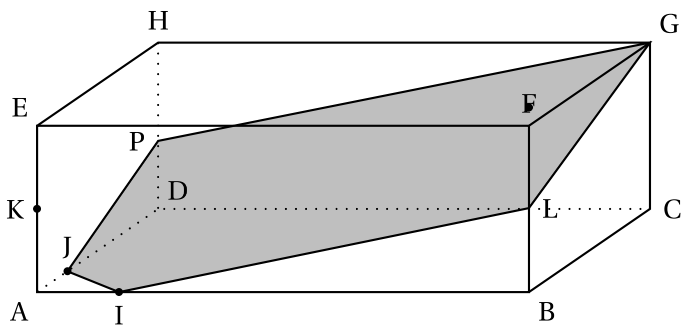
   La section avec (ABFE) est la droite (IL).

   La section avec (BCGF) est la droite (LG).

   Il reste à trouver l'intersection P du plan (IJG) avec la droite (HD) : comme les plans (ABFE) et (DCGH) sont parallèles, les droites (IJ) et (GP) sont parallèles.

   On trace donc la parallèle à (IL) contenant G qui coupe (HD) en P.

   La section est donc le pentagone JILGP (voir à la fin).



IV Métropole Réunion septembre 2015

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0\,;\,1\,;\,-1)$ et $B(-2\,;\,2\,;\,-1)$.
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t\\ y &=& 1+t\\ z &=& -1-t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

1. La droite (AB) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires doc tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où $k\in\mathbb{R}$.
   $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2-0; 2-1; -1-(-1) = (-2; 1; 0)$.
   $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-0; y-1; z-(-1) = (x; y-1; z+1)$.
   $$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k\\ y-1 &=& k\\ z+1 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k\\ y &=& 1+k\\ z &=& -1\end{array}\right.$$
   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k\\ y &=& 1+k\\ z &=& -1\end{array}\right.$ où $k\in\mathbb{R}$

2. (a) La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2; 1; 0)$.
   La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(1; 1; -1)$.
   Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.

   (b) Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes si elles admettent un point d'intersection, autrement dit s'il existe un réel t et un réel k tels que
   $$\left\{\begin{array}{rcl} -2+t &=& -2k\\ 1+t &=& 1+k\\ -1-t &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2 &=& -2k\\ 0 &=& k\\ t &=& 0\end{array}\right.$$
   Il n'y a donc pas de solution.
   Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

   Les deux droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z-3u=0$.
   $x_M+y_M-z_M-3u = -2+u+1+u-(-1-u)-3u = -2+u+1+u+1+u-3u = 0$ donc $M\in\mathscr{P}$
   Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1; 1; -1)$, qui est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$; donc le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.

4. Pour déterminer si le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants, on résout le système
   $$\left\{\begin{array}{l} x=-2k\\ y=1+k\\ z=-1\\ x+y-z-3u=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2k\\ y=1+k\\ z=-1\\ -2k+1+k+1-3u=0\end{array}\right. \iff$$
   $$\left\{\begin{array}{l} x=-2(2-3u)\\ y=1+2-3u\\ z=-1\\ 2-3u=k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-4+6u\\ y=3-3u\\ z=-1\\ 2-3u=k\end{array}\right.$$
   Donc le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants au point $N(-4+6u; 3-3u; -1)$.

5. (a) La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale en M au plan $\mathscr{P}$; donc la droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à toute droite du plan $\mathscr{P}$ passant par M, donc elle est perpendiculaire à la droite (MN) contenue dans $\mathscr{P}$ puisque $N\in\mathscr{P}$.

   (b) La droite (MN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$ de coordonnées
   $(-4+6u-(-2+u); 3-3u-(1+u),; -1-(-1-u)) = (-2+5u; 2-4u; u)$.
   La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2; 1; 0)$.
   Les droites (MN) et (AB) sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire de $\overrightarrow{MN}$ et de $\overrightarrow{AB}$ est nul.
   $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = (-2+5u)\times(-2)+(2-4u)\times 1+u\times 0 = 4-10u+2-4u = 6-14u$
   $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff 6-14u=0 \iff \dfrac{3}{7}=u$
   De plus, les droites (MN) et (AB) sont sécantes en M ; elles sont donc perpendiculaires si et seulement si $u=\dfrac{3}{7}$.

6. (a) $MN^2 = \| MN \|^2 = (-2+5u)^2+(2-4u)^2+u^2 = 4-20u+25u^2+4-16u+16u^2+u^2 = 42u^2-36u+8$

   (b) MN^2 est un trinôme du second degré en u de la forme au^2+bu+c, et le coefficient de u^2 est $a=42>0$; ce polynôme admet donc un minimum pour $u=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-36}{2\times 42}=\dfrac{3}{7}$.
   La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal, c'est-à-dire pour $u=\dfrac{3}{7}$.

V Métropole juin 2015

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0\,;\,-1\,;\,5)$, B$(2\,;\,-1\,;\,5)$, C$(11\,;\,0\,;\,1)$, D$(11\,;\,4\,;\,4)$.

1. (a) Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{\text{OI}}$.
   La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).

(b) On a $x_C = x_D = 11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ d'équation $\boxed{x = 11}$.

(c) (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ donc (AB) est orthogonale à $\mathscr{P}$.

Le point d'intersection E a des coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et la représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

On doit avoir : $\left\{\begin{array}{l} x = 11 \\ x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{array}\right.$ donc $\boxed{\text{E}(11\ ;\ -1\ ;\ 5)}$.

(d) Une représentation paramétrique de (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et une représentation paramétrique de (CD) est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 11 \\ y &=& 0,8t' \\ z &=& 1+0,6t' \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$. On résout le système $\left\{\begin{array}{lcl} t &=& 11 \\ -1 &=& 0,8t' \\ 5z &=& 1+0,6t' \end{array}\right.$ qui n'a pas de solutions, car on trouve t' négatif, donc $1+0,6t' < 5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. (a) $\overrightarrow{M_tN_t}\begin{pmatrix} 11-t \\ 0,8t+1 \\ 0,6t-4 \end{pmatrix}$ donc

$M_tN_t = \sqrt{(11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (0,6t-4)^2}$
$= \sqrt{121 - 22t + t^2 + 0,64t^2 - 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t +}$
$\boxed{\sqrt{2t^2 - 25,2t + 138}}$.

(b) M_tN_t est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.

On considère la fonction $f : t \mapsto 2t^2 - 25,2t + 138$; f est une fonction du second degré ; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour $t = \dfrac{25,2}{4} = 6,3$.

La distance est **minimale** pour $\boxed{t = 6,3 \text{ s}}$