Correction

I Pondichéry avril 2015

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

1. (a) Par symétrie $P(104 \leqslant X) = 0,16$ et donc $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0,16 = 1 - 0,32 = 0,68$.

   (b) On vient donc de trouver que $P(\mu - 20 \leqslant X \leqslant \mu + 20) = 0,68$: donc $\sigma \approx 20$.

2. (a) La variable Z est centrée et réduite : elle suit donc une loi normale centrée réduite.

   (b) On part de $P(X \leqslant 64) = 0,16$, d'où $P(X \leqslant 64) = P(X - 84 \leqslant -20) =$
   $P\left(\dfrac{X-84}{\sigma} \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right) = P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right)$.
   Finalement $P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,16$

   (c) Le résultat précédent entraîne que $-\dfrac{20}{\sigma} \approx -0,9945 \iff \sigma \approx \dfrac{20}{0,9945}$ soit $\sigma \approx 20,111$ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.

   (a) Il faut trouver :
   $P(24 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,115$ (calculatrice)

   (b) On a $P(X > 120) = 0,5 - P(84 \leqslant X \leqslant 120) \approx 0,037$.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

1. (a) Si G est la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant pris l'extension de garantie, puisque les tirages sont indépendants et de même probabilité 0,115, G suit une loi binomiale $\mathscr{B}(12,\ 0,115)$.
   La probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie est égale à :
   $P(G = 3) = \dbinom{12}{3} \times 0,115^3 \times (1 - 0,115)^9 \approx 0,1114$ soit 0,111 au millième près.

   (b) On a $P(G \geqslant 6) = 1 - P(G \leqslant 5) \approx 0,001$ au millième près.

2. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
   • Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65

   (a) • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
   • Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65.
   La variable aléatoire Y prend donc deux valeurs 65 et -334 avec les probabilités respectives 0,885 et 0,115.

   (b) On a $\mathrm{E}(Y) = 65 \times 0,885 + (-334) \times 0,115 = 19,115 \approx 19,12$ €au centime près. L'offre est donc avantageuse pour l'entreprise puisque celle gagne presque 20 € par client.

II Amérique du Nord juin 2015

1. À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(98 \leq X \leq 102) \simeq 0,9545$ à 10^{-4} près.
2. Centrons et réduisons l'évènement afin d'obtenir l'intervalle équivalent portant sur la variable centrée réduite :

$$98 \leq X \leq 102 \iff 98 - 100 \leq X - 100 \leq 102 - 100$$
$$\iff \frac{-2}{\sigma} \leq \frac{X-100}{\sigma} \leq \frac{2}{\sigma}$$

Posons $Z = \dfrac{X - 100}{\sigma}$. Nous savons que $Z \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$ et que $P\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) = 2P\left(Z \leq \dfrac{2}{\sigma}\right) - 1$.

Cherchons u tel que $2P(Z \leq u) - 1 = 0,97$, soit $P(Z \leq u) = 0,985$. À la calculatrice, on obtient $u \simeq 2,1701$ à 10^{-4} près.

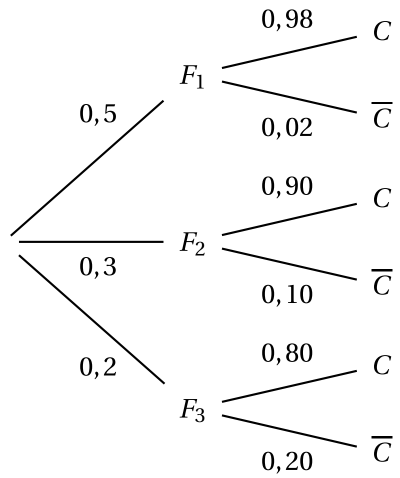
Ainsi, $\dfrac{2}{\sigma} = u$, ce qui donne $\sigma = \dfrac{2}{u} \simeq 0,9216$ à 10^{-4} près.

Remarque

Il faut absolument retenir le lien entre la probabilité sur un intervalle centré $P(Z \in [-u_\alpha\,;\ u_\alpha]) = 1-\alpha$ et la valeur de la fonction de répartition :
$P(Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
On peut retrouver rapidement cette formule en faisant un petit dessin permettant de déterminer les probabilités des queues de distribution, toutes deux égales à $\dfrac{\alpha}{2}$.

Partie B Contrôle à la réception

1. On cherche à déterminer $P_C(F_1) = \dfrac{P(C \cap F_1)}{P(C)}$.
Faisons un arbre afin de modéliser la situation. On donne les probabilités à partir des hypothèses de l'énoncé.



Calculons $P(C)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

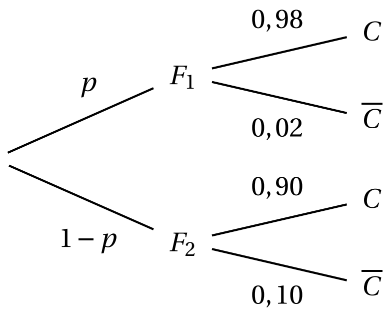
$$P(C) = P_{F_1}(C)P(F_1) + P_{F_2}(C)P(F_2) + P_{F_3}(C)P(F_3)$$

On obtient, après calcul, $P(C) = 0,92$.

D'autre part, $P(C \cap F_1) = P_{F_1}(C)P(F_1)$, ce qui donne, après calcul, $P(C \cap F_1) = 0,49$.

Finalement, on obtient $P_C(F_1) = \dfrac{0,49}{0,92} \simeq 0,5326$ à 10^{-4} près.

2. Faisons un arbre qui résume la nouvelle situation :



En reprenant la formule des probabilité totale, on cherche p tel que $P(C) = 0,92$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} 0,98p + 0,9(1-p) = 0,92 &\iff 0,08p = 0,02 \\ &\iff p = \frac{0,02}{0,08} = 0,25 \end{aligned}$$

L'entreprise doit donc acheter au minimum 25% de ses fèves au premier fournisseur.