TS : correction du contrôle (récurrence et suites)

I (3 points)

Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.
Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $4^n - 1 = 3k_n,\ k_n \in \mathbb{Z}$ »

- **Initialisation** : pour $n = 0$: $4^9 - 1 = 1 - 1 = 0$ qui est divisible par 3 ($0 = 3 \times 0$).
- **Hérédité** : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un tang n quelconque, donc $4^n - 1 = 3k_n,\ k_n \in \mathbb{Z}$.
  Alors : $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k_n + 1) - 1 = 4 \times 3k_n + 4 - 1 = 4 \times 3k_n + 3 = 3(4k_n + 1) = 3k_{n+1}$ en posant $k_{n+1} = 3k_n + 1 \in \mathbb{Z}$.
  On obtient bien un multiple de 3.
  |a propriété est héréditaire.

Conclusion : d'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II (3 points)

On donne la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n , par : $\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$.

Démontrons par récurrence que, pour tout naturel n , on a : $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, $\dfrac{n}{n+1} = 0 = u_0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un tang n quelconque, donc $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.
  Alors : $t_n + 1 = t_n + \dfrac{1}{(+1)(n+2)} = \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+1)^2)}{(n+1)(n+2)} = \boxed{\dfrac{n+1}{n+2}}$ (en simplifiant par $n+1$).
  La propriété est héréditaire

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III (Bac S métropole juin 2009 4 points)

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout $n \geqslant 1$: $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1$.
Ce tableau donne les dix premiers termes de la suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. D'après la relation de récurernce, on a :

$$\begin{aligned} 10w_{10} &= (10+1)\,w_{10-1} + 1 \\ 10w_{10} &= 11\,w_9 + 1 \\ w_{10} &= \frac{1}{10}((11 \times 19) + 1) = \boxed{21} \end{aligned}$$

la suite w_n semble être la suite des nombres impairs et donc $w_n = 2n + 1$ avec $w_0 = 1$.
Montrons le par recurrence
Soit P_n : « $w_n = 2n + 1$ »

- **Initialisation** : P_0 : « $w_0 = 2 \times 0 + 1$ » est vraie car $w_0 = 1$
- **Hérédité** : supposons P_n est vraie et montrons qu'alors P_n l'est aussi on a

$$\begin{aligned} w_n &= 2n+1 \\ (n+2)\,w_n &= (n+2)(2n+1) \\ (n+2)\,w_n + 1 &= (n+2)(2n+1) + 1 \\ (n+2)\,w_n + 1 &= (n+2)(2n+1) + 1 \\ (n+1)\,w_{n+1} &= 2n^2 + 5n + 3 = (2n+3)(n+1) \\ w_{n+1} &= \boxed{(2n+3)^2} \end{aligned}$$

ce qui montre P_{n+1} vraie

D'après l'axiome de récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2n+1$

IV (**5 points**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   - **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $n^2 = 0^2 = 0$ donc $u_0 > 0^2$.
   - **Hérédité** : on suppose la propriété vraie à un rang n quelconque, donc $u_n > n^2$.

     Alors : $u_{n+1} = u_n + 2n + 2 > n^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2 = (n+1)^2 + 2)$ donc $\boxed{u_{n+1} > (n+1)^2}$.

     La propriété est héréditaire

   F'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.
3. C'est du cours !

   Soit $A > 0$ un nombre quelconque. Soit p un entier supérieur à $\sqrt{A}$.

   Pour tout $n \geqslant p$, $n^2 \geqslant p^2 \geqslant \sqrt{A}^2 = A$ (croissance de la fonction carré sur $[0\,;\, = \infty[$) donc $n^2 > A$.

   On en déduit que la suite n'est pas majorée.
4. La suite (u_n) est croissante et non majorée, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$
5. $u_1 = u_{0+1} = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 3 = \boxed{4}$.

   $u_2 = u_{1+1} = u_1 + 2 \times 1 + 3 = \boxed{9}$

   $u_3 = \boxed{16}$; $u_4 = \boxed{25}$
6. On conjecture que $u_n = (n+1)^2$.
7. Effectuons une démonstration par récurrence :
   - **Initialisation** : pour $n = 0$, $(n+1)^2 = 1^2 = 1 = u_0$ donc c'est vrai our $n = 0$.
   - **Hérédité** : on suppose que c'est vrai pour un rang n quelconque, donc $u_n = (n+1)^2$.

     Alors : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 4 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$ c.q.f.d.

     Conclusion : d'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_n = (n+1)^3$.

V (**5 points**)

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$:

   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} \frac{\frac{2-(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{2+2+2u_n}{1+u_n}} = \frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{4+2u_n} 1 + u_n = \frac{1-u_n}{2(u_n+2)} = -\frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \boxed{-\frac{1}{2} v_n}$$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n = \boxed{\dfrac{2}{5} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}$
3. $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n v_n + 2v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -2v_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \Leftrightarrow$ $\boxed{u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1}}$.
4. On en déduit :

   $$\forall n \in \mathbb{N} : \boxed{u_n = \frac{-2 \times \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}}$$