# TS : correction du contrôle sur la fonction exponentielle (2 heures)

## I (2 points)

a) Soit $e^{x^2+2x} = e \Leftrightarrow e^{x^2+2x} = e^1$. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$. L'équation équivaut à $x^2+2x=1$ car $e^a = e^{b \Leftrightarrow a=b}$ d'après la croissance de la fonction exp, d'où $x^2+2x-1=0$;

le discriminant vaut $\Delta = 8 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$ et $x_2 = -1+\sqrt{2}$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-1-\sqrt{2}\,;\,-1+\sqrt{2}\right\}}$$

b) Soit l'équation $e^{3x^2} = e^{5x-1}$. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

L'équation équivaut à $\Leftrightarrow 3x^2 = 5x-1$
$\Leftrightarrow 3x^2-5x+1=0$.

$\Delta = 13 > 0$; il y a deux solutions :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{5-\sqrt{13}}{6}\,;\,\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right\}}$$

## II (2,5 points)

a) Soit l'inéquation $e^{\frac{3}{x}} > e^{1-x}$.

L'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R}.^*$.

Pour $x \in \mathscr{D}$, l'inéquation équivaut à $\dfrac{3}{x} > 1-x$
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{x} - (1-x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-x(1-x)}{x} > 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+3}{x} > 0$.

Signe de $x^2-x+3$ : le discriminant est $\Delta = -10$ donc $x^2-x+1>0$ pour tout $x$.

La fraction est du signe du dénominateur, donc positive pour $x>0$.

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = ]0\,;\,+\infty[}$

b) Soit l'inéquation $e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc l'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

$e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(e^x)^2-1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^x} > 0$
$\Leftrightarrow e^{2x}-1 > 0$ car $e^x > 0$.

Or, $e^{2x}-1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = ]0\,;\,+\infty[}$

## III (2,5 points)

a) $\forall x \neq 0$, $f(x) = x^2+2-e^x = x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{e^x}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to=+\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right) = +\infty$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

<par somme et produit, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

b) $\forall x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{2e^x-x}{x^2} = 2\times\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right) == \infty$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

## IV (4 points)

Soit $g$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x\left(e^x-e\right)+e-2$.

1. $g$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

   $g = uv+w$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = e^x-e \\ w(x) = e-2 \end{cases}$

   $g' = (uv+w)' = (uv)'+w' = u'v+uv'+w'$ avec $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{x-1} \\ w'(x) = 0 \end{cases}$

   On en déduit que, pour tout $x \geqslant 0$,
   $g'(x) = e^x - e + xe^x = \boxed{(1+x)e^x - e}$

   $g'$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables et
   $g''(x) = e^{x+(1+x)e^x} = \boxed{(x+2)e^x}$.

2. Comme $e^x > 0$ pour tout $x$, $g''(x)$ est du signe de $x+2$, donc positif sur $[0\,;\,+\infty[$. $g$ est donc croissante sur $[0\,;\,:\infty[$

   $g'(0) = 1-e$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

   donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty}$

   On en déduit le tableau de variations de $g'$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g''(x)$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | $1-e<0$ | $+\infty$ |

3. $g'$ est continue sur $[0+\infty[$, $g'(0) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution dans cet intervalle ; comme $g'$ est croissante, cette solution est unique ; on la note $\alpha$.

   À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0,6$ à $10^{-1}$ près.

4. On en déduit le tableau de signes de $g'$ et le tableau de variations de $g$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\mathrm{e}-2$ | $\searrow$ | $g(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

## V (4,5 points)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

1. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

   (a) $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g'(x) = \mathrm{e}^x - 1}$.

   $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

   On en déduit le tableau de variations de $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $0$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

   (b) D'après le tableau de variation de $g$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.

   On en déduit : $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$, donc

   $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$ donc $\boxed{\mathrm{e}^x - x > 0}$ sur $\mathbb{R}$

2. (a) • Limite en $-\infty$ : on a une forme indéterminée.

   Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1}$ ; or

   $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = 0$.

   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1}$

   • Limite en $+\infty$ : on a encore une forme indéterminée

   $\forall x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}$.

   D'après les formules des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$.

   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ donc la route d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la route d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3. (a) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \mathrm{e}^x - x \end{cases}$.

   $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 1$

   $v'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

   Alors : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - x - x(\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$

   $= \boxed{\dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - x)^2}}$ qui est du signe de $1 - x$, car le dénominateur est positif (carré d'un réel) et $\mathrm{e}^x > 0$.

   (b) $f'(x) = 0$ pour $x = 1$ ; $f'(x) < 0$ pour $x > 1$ et $f'(x) > 0$ pour $x < 1$.

   $f$ est donc croissante sur $]-\infty\,;\,1$ puis décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

   **Tableau de variation de $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1$ | $\searrow$ | $0$ |

   (c) Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au oint d'abscisse 0 est :

   $y = f'(0)(x - 0) = f(0) \Leftrightarrow y = 1x + 0$ donc $\boxed{y = x}$.

## VI (4,5 points)

On considère les points B(100; 100) et C$\left(50\ ;\ \dfrac{50}{\sqrt{\text{e}}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.
On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée $\Gamma$ est donnée ci-dessous.

On suppose de plus qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

- pour tout réel x, $f(x) = x\text{e}^{ax+b}$.
- les points B et C appartiennent 'a la courbe $\Gamma$.

1. (a) La courbe passe par B donc
$f(100) = 100 \Leftrightarrow 100\text{e}^{100a+b} = 100$
$\Leftrightarrow \text{e}^{100a+b} = 1 \Leftrightarrow \boxed{100a+b=0}$.
De même, $\Gamma$ passe par C, donc
$50\text{e}^{50a+b} = \dfrac{50}{\sqrt{\text{e}}} \Leftrightarrow \text{e}^{50a+b} = \dfrac{1}{\sqrt{\text{e}}} = \text{e}^{-\frac{1}{2}}$ d'où $50a+b = -\dfrac{1}{2}$.
a et b sont donc solutions du système $\boxed{\begin{cases} 100a+b=0 \\ 50a+b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}}$

   (b) En soustrayant les deux lignes, on trouve $a = \dfrac{1}{100} = 0,01$ puis d'après la première équation, $b = -1$.
On en déduit $\boxed{f(x) = x\text{e}^{0,01x-1}}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(0,01x-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{e}^{0,01x-1} = \lim\limits_{X\to+\infty}\text{e}^X = +\infty$, d'où, par produit,
$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3. (a) $f(x) = x\text{e}^{0,01x-1} = x\text{e}^{0,01x} \times \dfrac{1}{\text{e}}$
$= \dfrac{1}{\text{e}} \times 100 \times 0,01x\text{e}^{0,01x} = \boxed{\dfrac{100}{\text{e}} \times 0,01x\text{e}^{0,01x}}$.

   (b) On pose $X = 0,01x$; alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(0,01x\text{e}^{0,01x}\right) = \lim\limits_{X\to-\infty} X\text{e}^X = 0$ (croissances comparées) donc
$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

4. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x$, $f(x) = x\text{e}^{0,01x-1}$ donc
$f'(x) = \text{e}^{0,01x-1} + x \times 0,01\text{e}^{0,01x-1}$
$= \boxed{(1+0,01x)\text{e}^{0,01x-1}}$ qui est du signe de $1+0,01x$.
$1+1,01x = 0 \Leftrightarrow x = -100$ et $1+1,01x > 0$ pour $x > -100$.
$f(-100) = -100\text{e}^{-2} \approx -13,5$
**Tableau de variation de f :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-100$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| Ň$(x)$ | 0 | $\searrow$ | $-100\text{e}^{-2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = x\text{e}^{0,01x-1} - x = x\left(1-\text{e}^{0,01x-1}\right)$.
$1-\text{e}^{0,01x-1} = 0 \Leftrightarrow \text{e}^{0,01x-1} = 1 = \text{e}^0$
$\Leftrightarrow 0,01x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 100}$ et $1-\text{e}^{0,01x-1} > 0 \Leftrightarrow \boxed{x < 100}$.
On en déduit le tableau de signes :

| $x$ | $+\infty$ | | 0 | | 100 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | |
| $1-\text{e}^{0,0x-1}$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)-x$ | | $+$ | 0 | $-$ | $+$ | $-$ | |

On en déduit que $\mathscr{C}$ est au)dessus de $\mathscr{D}$ sur $]-\infty\ ;\ 0]$ puis sur $[100\ ;\ +\infty[$