TS-TD sur les suites nº 1

I

Dans chaque cas suivant, donner le sens de variation de la suite (u_n).

a) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

$u_{n+1} — u_n = -3 < 0$ donc la suite est décroissante (arithmétique)

b) $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ qui change de signe donc la suite n'est pas monotone.

c) $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 2u_n^2 + u_n \end{cases}$

$u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 \geqslant 0$ donc la suite est croissante.

II

(u_n) et (v_n) sont deux suites croissantes ; la suite $(u_n + v_n)$ est-elle croissante ?

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_{n+1} + v_{n+1}) = (u_n + v_n) = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n) \geqslant 0$ car chacune des parenthèses est positive.

III

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n}$.

On admet que v_n est positif pour tout n.

1. Comment le montrerait-on ?

   Cela se montre par récurrence

2. Montrer que la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{v_n}$ est arithmétique.

   Pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = u_n + 1$ donc (u_n) est arithmétique de raison $r = 1$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 1 + n$ donc $v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+1}$

IV

Une personne loue un appartement à partir du 1er janvier 2010.

Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas le loyer annuel initial est 4 800 € et le locataire a l'intention d'occuper l'appartement pendant neuf années complètes.

1. **Contrat nnº 1**

   Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5 % du loyer de l'année précédente.

   (a) Calculer le loyer annuel u_2 payé lors de la 2e année.

   $u_2 1,05 u_1 = 5\,040$ €.

   (b) Exprimer u_n (loyer annuel payé lors de la ne année) en fonction de n.

   On a une suite géométrique : $u_n = u_1 \times 1,05^{n-1} = 4\,800 \times 1,05^{n-1}$.

   En déduire la valeur de u_9 .

   $u_9 = 7091,78613$

   (c) Exprimer en fonction de n la somme payée à l'issue de n années de location. En déduire la somme payée à l'issue de 9 années de location.

   On trouve une some égale à $7091,78613 \approx 7092$

2. **Contrat n°2**

   Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 300 € du loyer de l'année précédente.

   (a) Calculer le loyer annuel v_2 payé lors de la 2e année.

   $v_2 = 5\,100$

   (b) Exprimer v_n (loyer annuel payé lors de la ne année) en fonction de n .

   On a une suite arithmétique : $u_n = u_1 + (n - 1)r = 4\,800 + 300(n-1) = 4\,500 + 300n$

   En déduire la valeur de v_9 .

   $v_9 = 7\,200$

   (c) Exprimer en fonction de n la somme payée à l'issue de n années de location.

En déduire la somme payée à l'issue de 9 années de location.
$S' = 54\,000$

3. Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?