TS1-TS2 : devoir sur table commun n° 6 (4 heures)

EXERCICE I Antilles-Guyane septembre 2014

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. $f\left(-1+\imath\sqrt{3}\right) = \left(-1+\imath\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(-1+\imath\sqrt{3}\right) + 9 = 1 - 2\imath\sqrt{3} - 3 - 2 + 2\imath\sqrt{3} + 9 = \boxed{5}$
2. On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$:
   $f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0\,;\, \Delta = 4 - 16 = -12 = -\left(2\sqrt{3}\right)^2$
   Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-2+2\imath\sqrt{3}}{2} = \boxed{-1+\imath\sqrt{3}}$ et $\boxed{-1-\imath\sqrt{3}}$
   On appelle A le point d'affixe $z_A = -1+\imath\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B = -1-\imath\sqrt{3}$
   $|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$
   Soit θ_A un argument de z_A : $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_A = -\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \theta_A = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
   Donc $z_A = 2\mathrm{e}^{\frac{2\imath\pi}{3}}$
   Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B = 2\mathrm{e}^{-\frac{2\imath\pi}{3}}$
   $|z_A| = 2$ donc le point A se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la droite d'équation $x = -1$. Idem pour B.
   Voir graphique page 2.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   $f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$
   Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynà´me $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.
   $\Delta = 4 - 4(9-\lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32\,;\, \Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \boxed{\lambda < 8}$
   L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $]-\infty\,;\,8[$.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\left|f(z) - 8\right| = 3$
   $f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$; donc $\left|f(z) - 8\right| = \left|(z+1)^2\right| = |z+1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.
   Donc $\left|f(z) - 8\right| = 3 \iff |z+1|^2 = 3 \iff \boxed{|z+1| = \sqrt{3}}$
   Soit Ω le point d'affixe -1, donc de coordonnées $(-1\,;\,0)$; si on appelle M le point d'affixe z, alors $|z+1| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$.
   L'ensemble des points M vérifiant $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est le **cercle** de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.
   On trace (F) sur le graphique (voir page 2).
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   (a) $f(z) = z^2 + 2z + 9 = (x+\imath y)^2 + 2(x+\imath y) + 9 = x^2 + 2\imath xy - y^2 + 2x + 2\imath y + 9$
   $= \boxed{x^2 - y^2 + 2x + 9 + \imath(2xy + 2y)}$.

(b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

$f(z)$ réel $\iff 2xy+2y=0 \iff 2y(x+1)=0 \iff \boxed{y=0 \text{ ou } x=-1}$

Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x=-1$.

Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$. Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\boxed{\left(-1-\sqrt{3}\,;0\right)}$ et $\boxed{\left(-1+\sqrt{3}\,;0\right)}$.

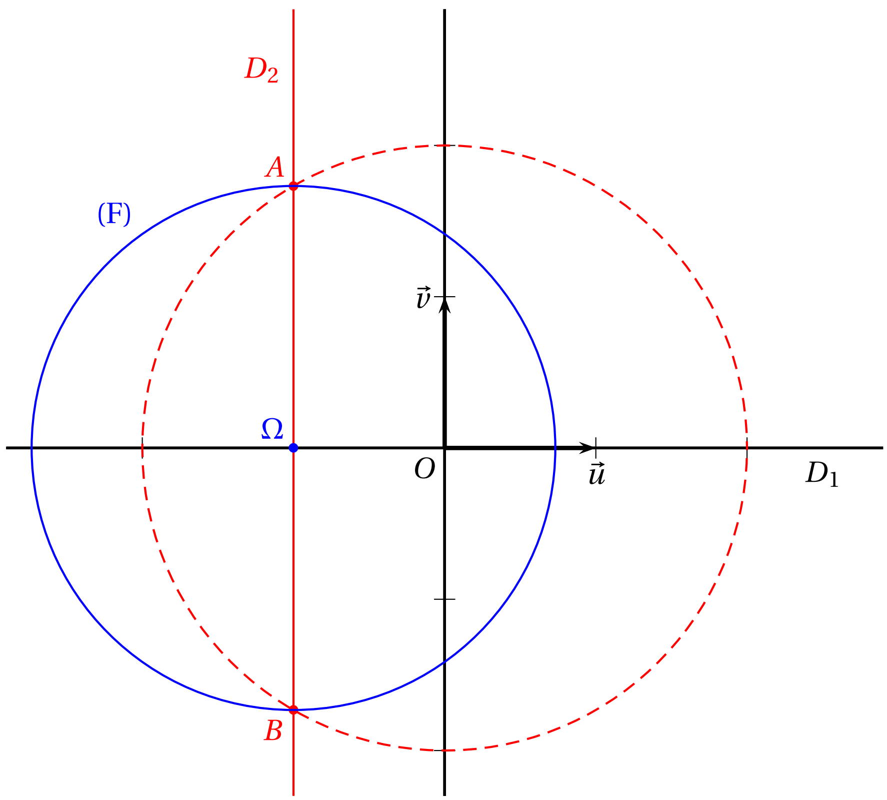
Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1 ; donc A et B sont situés sur la droite D_2.

$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|-1+\mathrm{i}\sqrt{3}+1\right| = \left|\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point A appartient au cercle (F).

$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = \left|-1-\mathrm{i}\sqrt{3}+1\right| = \left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point B appartient au cercle (F).

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont :

$\left(-1-\sqrt{3}\,;0\right)$, $\left(-1+\sqrt{3}\,;0\right)$, $\left(-1\,;\sqrt{3}\right)$ et $\left(-1\,;-\sqrt{3}\right)$



EXERCICE II Centres étrangers juin 2014

Les parties A et B sont indépendantes

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

(a) • $f_1(0) = 0$: évident ;
 • $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$;
 • f_1 fonction polynôme est dérivable sur $[0\,;\,1]$ donc continue sur cet intervalle ;
 • $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 3(2x-1)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,1]$.

f_1 est donc bien une fonction de retouche.

(b) Il semble que la courbe coupe la droite d'équation $y = x$ pour $x = 0,5$.
On peut vérifier que $f_1(0,5) = 0,5$.
On a donc $f_1(x) \leqslant x \iff x \geqslant 0,5$.
Ce résultat signifie que f_1 éclaircie les nuances codées par un nombre inférieur à 0,5 et inversement pour celles codées par un réel entre 0,5 et 1.

2. (a) f_2 est une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, donc g l'est aussi et :
$g'(x) = f_2'(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{1+(\mathrm{e}-1)x} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1-1-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x} = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$.

(b) Comme $\mathrm{e} > 1$, le dénominateur est positif comme somme de termes positifs ; le signe de $g'(x)$ est donc celui de son numérateur ; or
$\mathrm{e}-2-(\mathrm{e}-1)x \geqslant 0 \iff \mathrm{e}-2 \geqslant (\mathrm{e}-1)x \iff \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \geqslant x$
On a $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \approx 0,418$.
On a donc avec $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} = a$,
$g'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant a$ et de même
$g'(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant a$.
La fonction g est donc croissante sur $[0\,;a]$, puis décroissante sur $[a\,;\,1]$.
g a donc un maximum $g(a) \approx 0,12$.

(c) D'après la question précédente sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ la fonction g est continue et croissante de $g(0) = 0$ à $g(a) \approx 0,12$.
Comme $0,05 \in [0\,;\,a]$, il existe une valeur unique α de $[0\,;\,a]$ telle que $f(\alpha) = 0,05$.
On démontre de même (avec g décroissante) que sur $[a\,;\,1]$ il existe un réel unique β tel que $g(\beta) = 0,05$.
On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

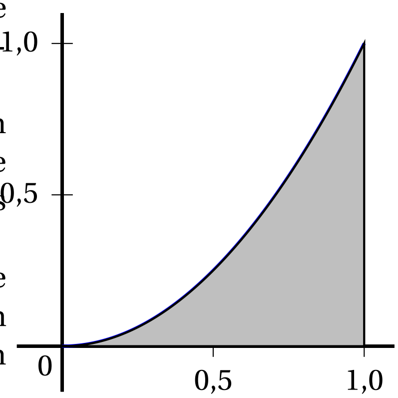
Partie B

1. Cet algorithme calcule le nombre de nuances par palier de 0,01 pour lesquelles la modification est perceptible visuellement.
2. On applique l'algorithme à la fonction $g = f_2 - x$. Il calcule toutes valeurs telles que $g(x) \geqslant 0,05$.
Ce sont d'après la question précédente toutes les nuances comprises entre 0,09 et 0,85 : l'algorithme doit donc retourner : $c = 85 - 9 + 1 = 77$.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-a-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathscr{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.



Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. (a) f_1 produit de fonctions positives sur $[0\,;\,1]$ est positive sur cet intervalle. On a donc :
   $\mathscr{A}_{f_1} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)$.

   (b) On a $f_2(0) = -15 + 15 = 0$ et comme il est admis qu'elle est une fonction de retouche elle est croissante sur $[0\,;\,1]$, donc positive sur cet intervalle. On a donc :
   $\mathscr{A}_{f_2} = \displaystyle\int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4}\right)\mathrm{d}x = \left[2x^2 - 15x + 60\ln(x+4)\right]_0^1 =$
   $2 - 15 + 60\ln 5 - 60\ln 4 = -13 + 60\ln\dfrac{5}{4}$.

2. On a $\mathscr{A}_{f_1} = \dfrac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0,316$ et $\mathscr{A}_{f_2} = -13 + 60\ln\dfrac{5}{4} \approx 0,389$.
   C'est la fonction f_1 qui éclaircit le plus l'image.

EXERCICE III

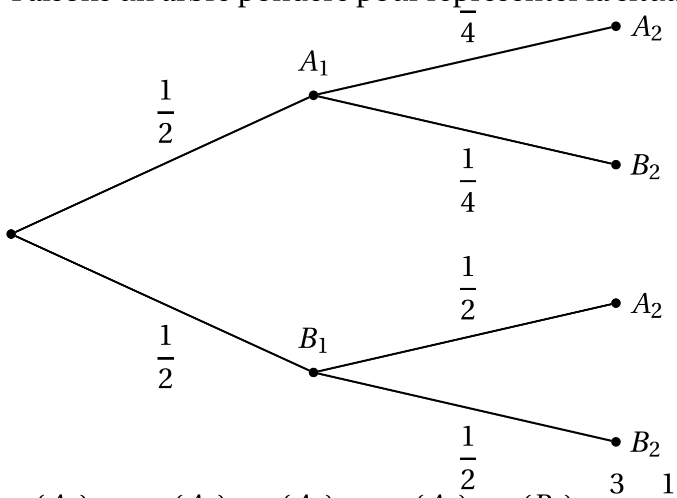
Dans un stand, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènernant « La n-ième cible est atteinte » ;
- B_n l'évènement « La n-ième cible n'est pas atteinte » ;
- a$_n$ la probabilité de l'évènement A_n ;
- b_n la probabilité de l'évènement B_n.

1. $a_1 - \dfrac{1}{2}\,;\, b_1 - \dfrac{1}{2}$.

Faisons un arbre pondéré pour représenter la situation.



$p(A_2) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{8}}$

2. La formule des probabilités totales donne : $a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) = \frac{2}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n / \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1-a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

   (a) On pose $u_n = a_n - \frac{2}{3}$.

   Pour tout n, $u_{n+1} = a_(n+1) - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}u_n$ donc la suite est géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

   Le premier terme est $u_1 = a_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

   (b) On obtient $u_n = u_1 q^{n-1} = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et $a_n = u_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

   (c) $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

   Interpréter le résullal.

EXERCICE IV Amérique du Nord mai 2014

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

   $g(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = \boxed{\mathrm{e}^{-x}\left(5 - 3\mathrm{e}^{-x}\right)}$.

   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ (positivité de l'exponentielle), $g(x)$ est du signe de $5 - 3\mathrm{e}^{-x}$.

   $5 - 3\mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow 5 > 3\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \frac{5}{3} > \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{3}\right) > -x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{5}\right) < x$ ce qui est toujours vrai car $\ln\left(\frac{3}{5}\right) < 0 < x$.

   Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $\boxed{g(x) > 0}$.

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont un point commun d'abscisse x si et seulement si $f(x) = x-3$ soit $g(x) = 0$ ce qui n'est pas possible car on vient de voir que $g(x) > 0$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont **pas de point commun**.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

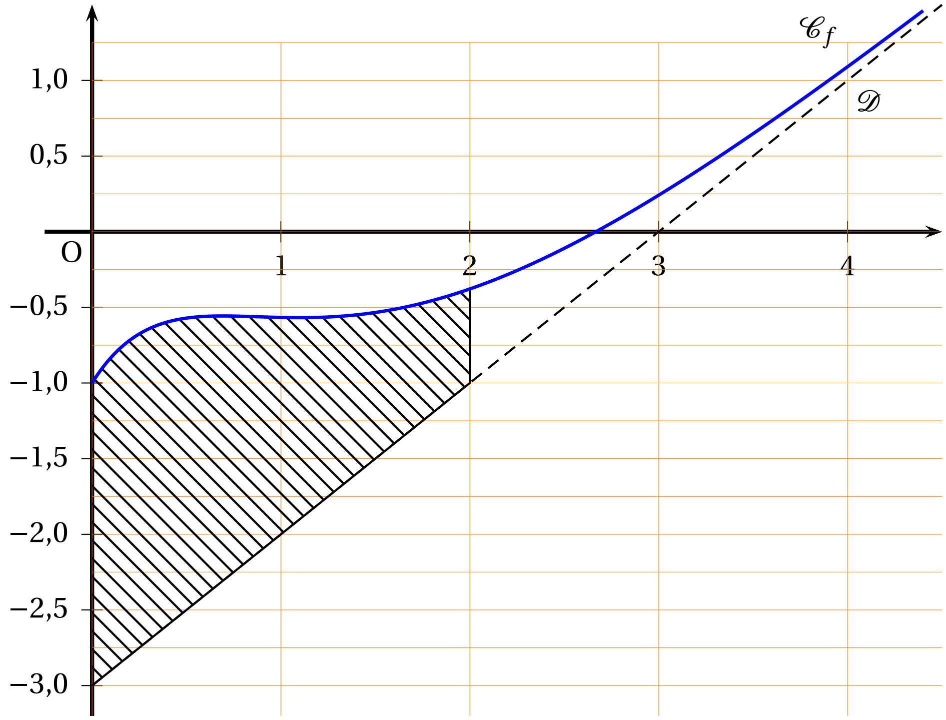
1. Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
$MN = |\,f(x)-(x-3)\,| = |\,g(x)\,| = \boxed{g(x)}$ car $g(x) > 0$ d'après la première question.
2. Si u est dérivable, $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u$.
La dérivée de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est donc $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et celle de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est $x \longmapsto -2\mathrm{e}^{-2x}$.
Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 2\times 3\mathrm{e}^{-2x} = \boxed{6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x}}$.
3. g étant dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée sur $[0\,;\,+\infty[$.
Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
$$\begin{aligned} g'(x) \geqslant 0 &\iff 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \\ &\iff 6\mathrm{e}^{-x} - 5 \geqslant 0 && \text{on a divisé par } \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{5}{6} \\ &\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{5}{6}\right) && \text{croissance de la fonction ln} \\ &\iff \boxed{x \leqslant \ln\left(\frac{6}{5}\right)} \end{aligned}$$
En $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right)$ est un **maximum** pour g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
$g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right) = 5\times\mathrm{e}^{\frac{5}{6}} - 3\times\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)^2 = 5\times\dfrac{5}{6} - 3\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{75}{36} = \boxed{\dfrac{25}{12}}$
La distance entre un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et le point de même abscisse sur la droite $\mathscr{D}$ est donc maximale lorsque $x = \ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$. Cette distance maximale vaut $\dfrac{25}{16}$ unités.
Remarque : Comme le repère est orthogonal (a priori pas orthonormé), il s'agit d'unité en ordonnée.)

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t)-(t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. $\mathscr{A}(2) = \displaystyle\int_0^2 [f(t)-(t-3)]\,\mathrm{d}t = \int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $g > 0$ sur $[0;2]$. $\mathscr{A}(2)$ mesure donc (en unités d'aires) l'aire du domaine limité par les droites d'équation $x=0$, $x=2$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$.



2. La fonction g est continue sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, la fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}'=g>0$. La fonction $\mathscr{A}$ est donc bien **croissante** sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 5\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t-3\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale}\\ &= 5\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x-3\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x\\ &= 5\left(-\mathrm{e}^{-x}+1\right)-3\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}\right)\\ &= 5-5\mathrm{e}^{-x}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}(x)=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}-5\mathrm{e}^{-x}+\frac{7}{2}}$$

4. $\mathscr{A}(x)=2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}-5\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{7}{2}=2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}-5\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{3}{2}=0$

   On pose $X=\mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}-5\mathrm{e}^{-x}+\frac{3}{2}=0 &\Leftrightarrow X \text{ solution de } \frac{3}{2}X^2-5X+\frac{3}{2}=0\\ &\Leftrightarrow X \text{ solution de } 3X^2-10X+3=0 \qquad \text{équation du second degré}\\ &\Leftrightarrow X=\frac{1}{3} \text{ ou } X=3\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{3} \text{ ou } \mathrm{e}^{-x}=3 \qquad \text{on revient à } x \text{ et } X=\mathrm{e}^{-x}\\ &\Leftrightarrow x=\ln 3 \text{ ou } x=-\ln 3 \qquad -\ln\frac{1}{3}=-(-\ln 3)=\ln 3\\ &\Leftrightarrow x=\ln 3 \qquad \text{car } x\geqslant 0 \text{ et } -\ln 3<0\end{aligned}$$

Finalement, $\mathscr{A}(x)=2 \Leftrightarrow \boxed{x=\ln 3}$.