TS1-TS2 : correction du devoir sur table n° 4 (4 heures

Exercice I : Antilles-Guyane juin 2014

Partie A

1. (a) $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x$.

   - Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$.
   - Limite en $+\infty$: on e une forme indéterminée.
     $\forall x \neq 0,\ g(x) = x\left(\dfrac{1}{x} - 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right)$.
     $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$ (d'après les croissances comparées), donc
     $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$ et par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

   (b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + \mathrm{e}^x$.
   On a alors $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
   Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) On déduit du tableau précédent que, pour tout réel x, $\boxed{g(x) \geqslant 2 > 0}$.

2. **Limite en** $-\infty$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$; $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = x \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$
   donc, par somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

   Limite en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ et, par croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc, par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

3. Pour tout réel x, on a :
   $f'(x) = 1 + \dfrac{1\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x} = 1 + \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1 - x}{\mathrm{e}^x} = \boxed{\mathrm{e}^{-x} g(x).}$

4. On a vu plus haut que, pour tout réel x, $g(x) > 0$, et comme par ailleurs $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on en déduit que $\boxed{f'(x) > 0}$.
   On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0$ donc $f(x)$ prend des valeurs négatives.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$ donc $f(x)$ prend des valeurs positives.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution.
Comme f est strictement croissante, l(équation $f(x)=0$ possède dans $\mathbb{R}$ une solution α **unique**.
Par ailleurs, $f(-1) = -e^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc : $\boxed{-1 < \alpha < 0}$.

6. (a) La tangente T a pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow \boxed{y = 2x+1}.$$

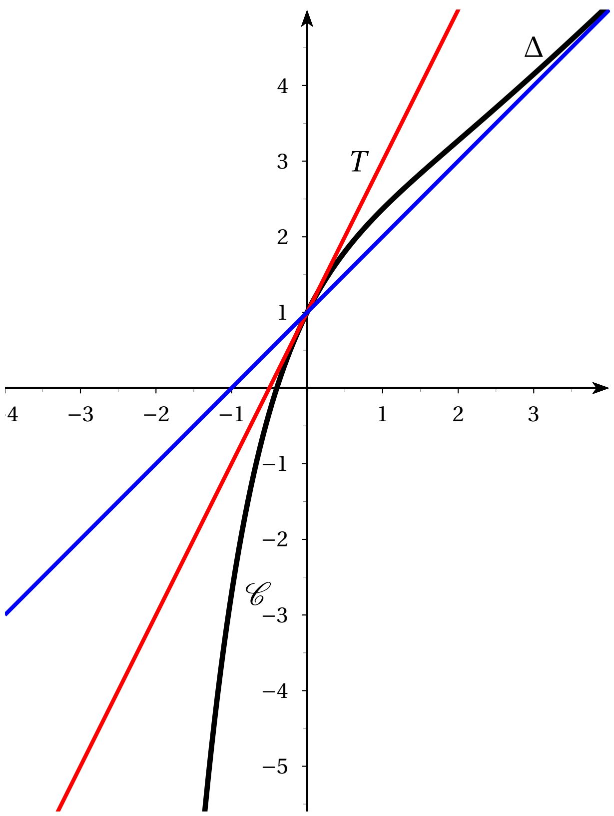
(b) Posons, pour tout réel x, $k(x) = f(x) - (2x+1)$, alors :
$k(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x} - (2x+1) = \dfrac{x}{e^x} - x = \boxed{\dfrac{x}{e^x}\left(1-e^x\right)}$, qui est du signe de $x\left(1-e^x\right)$ car $e^x > 0$.
Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1-e^x$		$+$	0	$-$	
$k(x)$		$-$	0	$-$	

On en déduit que $\mathscr{C}$ est située **en dessous** de T.

7. Soit Δ la droite d'équation $y = x+1$.
$f(x) - (x+1) = \dfrac{x}{e^x}$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$.
8. On en déduit que Δ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (x+1) = \dfrac{x}{e^x}$ qui est du signe de x donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'asymptote Δ pour $x \geqslant 0$ et en dessous pour $x \leqslant 0$.

La courbe n'était pa demandée, mais la voilà :



Exercice II : Réunion Métropole septembre 2015

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points $A\,(0\,;\,1\,;\,-1)$ et $B\,(-2\,;\,2\,;\,-1)$.

— la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2+t\\ y &=& 1+t\\ z &=& -1-t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. La droite (AB) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires doc tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$.

   $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-2-0\\ 2-1\\ -1-(-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-0\\ y-1\\ z-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x\\ y-1z+1)\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2k\\ y-1 &=& k\\ z+1 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2k\\ y &=& 1+k\\ z &=& -1\end{array}\right.$

   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -2k\\ y &=& 1+k \quad \text{où } k \in \mathbb{R}\\ z &=& -1\end{array}\right.}$

2. (a) La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}(-2\\ 1\\ 0)\end{pmatrix}$.

   La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1)\end{pmatrix}$.

   Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont **pas parallèles**.

   (b) Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes si elles admettent un point d'intersection, autrement dit s'il existe un réel t et un réel k tels que

   $\left\{\begin{array}{rcl} -2+t &=& -2k\\ 1+t &=& 1+k\\ -1-t &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2 &=& -2k\\ 0 &=& k\\ t &=& 0\end{array}\right.$ Il n'y a donc **pas de solution**.

   Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont **pas sécantes**.

   Les deux droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont ***non coplanaires****.*

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z-3u=0$.

   $x_M + y_M - z_M - 3u = -2+u+1+u-(-1-u)-3u = -2+u+1+u+1+u-3u = 0$ donc $\boxed{M \in \mathscr{P}}$

   Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$, qui est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$; donc le plan $\mathscr{P}$ est **orthogonal** à la droite $\mathscr{D}$.

4. Pour déterminer si le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants, on résout le système

   $\left\{\begin{array}{l} x=-2k\\ y=1+k\\ z=-1\\ x+y-z-3u=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2k\\ y=1+k\\ z=-1\\ -2k+1+k+1-3u=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2(2-3u)\\ y=1+2-3u\\ z=-1\\ 2-3u=k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-4+6u\\ y=3-3u\\ z=-1\\ 2-3u=k\end{array}\right.$

   Donc le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont **sécants** au point $\boxed{N\,(-4+6u\,;\,3-3u\,;\,-1)}$.

5. (a) La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale en M au plan $\mathscr{P}$; donc la droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à toute droite du plan $\mathscr{P}$ passant par M, donc elle est perpendiculaire à la droite (MN) contenue dans $\mathscr{P}$ puisque $N \in \mathscr{P}$.

(b) La droite (MN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -4+6u-(-2+u) \\ 3-3u-(1+u) \\ -1-(-1-u)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5u \\ 2-4u \\ u) \end{pmatrix}$.

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0) \end{pmatrix}$.

Les droites (MN) et (AB) sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire de $\overrightarrow{MN}$ et de $\overrightarrow{AB}$ est nul.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = (-2+5u)\times(-2)+(2-4u)\times 1+u\times 0 = 4-10u+2-4u = 6-14u$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff 6-14u=0 \iff u=\dfrac{3}{7}$

De plus, les droites (MN) et (AB) sont sécantes en M ; elles sont donc perpendiculaires si et seulement si $u=\dfrac{3}{7}$.

6. (a) $MN^2 = \| MN \|^2 = (-2+5u)^2+(2-4u)^2+u^2 = 4-20u+25u^2+4-16u+16u^2+u^2 = \boxed{42u^2-36u+8}$

(b) MN^2 est un trinôme du second degré en u de la forme au^2+bu+c, et le coefficient de u^2 est $a=42>0$; ce polynôme admet donc un minimum pour $u=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-36}{2\times 42}=\dfrac{3}{7}$.

La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal, c'est-à-dire pour $\boxed{u=\dfrac{3}{7}}$.

Exercice III

1. $\dfrac{2+3\text{i}}{5-3\text{i}} = \dfrac{(2+3\text{i})(5+3\text{i})}{5^2+3^2} = \dfrac{1+21\text{i}}{34} = \boxed{\dfrac{1}{34}+\dfrac{21}{34}\text{i}}$

2. $|z-2+5\text{i}| = 8 \Leftrightarrow |z-(2-5\text{i})| = 8$.
Soit A le point d'affixe $2-5\text{i}$.
Alors : $|z-(2-5\text{i})| = 8 \Leftrightarrow AM = 8$.
L'ensemble cherché est le **cercle de centre A et de rayon 8**.

3. $|z-1+4\text{i}| = |z-2-5\text{i}| \Leftrightarrow |z-(1-4\text{i})| = |z-(2+5\text{i})|$.
Soient B et C lestions d'affixes respectives $z_B = 1-4\text{i}$ et $z_C = 2+5\text{i}$.
Alors : $|z-(1-4\text{i})| = |z-(2+5\text{i})| \Leftrightarrow BM = CM$.
L'ensemble cherché est la **médiatrice du segment [BC]**.

4. Soit l'équation $(2\text{i}+z)(z+\text{i}(3-z)) = 0 \Leftrightarrow$.
Dans $\mathbb{C}$, un roduit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   - Premier cas : $2\text{i}+z=0$ donc $z=-2\text{i}$
   - Deuxième cas : $z+\text{i}(3-z) \Leftrightarrow z+3\text{i}-\text{i}z=0 \Leftrightarrow (1-\text{i})z=-3\text{i}$ d'où $z=-\dfrac{3\text{i}}{1-\text{i}}=-\dfrac{3\text{i}(1+\text{i})}{2}=\dfrac{3-3\text{i}}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i}$.

   L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-2\text{i}\,;\,\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\text{i}\right\}}$

5. Soit l'équation l'équation $\text{i}\overline{z}+7=2z+2\text{i}$.
On pose $z=x+\text{i}y$. L'équation s'écrit :

$\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)+7=2(x+\mathrm{i}y)+2\mathrm{i} \Leftrightarrow \mathrm{i}x+y+7=2x+2\mathrm{i}y+2\mathrm{i} \Leftrightarrow (y-2x+7)+\mathrm{i}(x-2y-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+\ \ y=-7\\ \ \ x-2y=2\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}-2x+\ \ y=-7\\ \ \ 2x-4y=4\end{cases}$.
En additionnant les deux lignes, on trouve $-3y=-3$ donc $y=1$ puis, en remplaçant, $x=4$.
$\boxed{\mathscr{S}=\{4+\mathrm{i}}$

6. $1-2z=3\mathrm{i}z+5-\mathrm{i} \Leftrightarrow (-2-3\mathrm{i})z=4-\mathrm{i} \Leftrightarrow z=\dfrac{4-\mathrm{i}}{-2-3\mathrm{i}}=\dfrac{(4-\mathrm{i})[-2+3\mathrm{i}]}{(-2)^2+(-3)^2}=\dfrac{-5+14\mathrm{i}}{13}=-\dfrac{5}{13}+\dfrac{14}{13}\mathrm{i}.$ $\boxed{\mathscr{S}=\{-\dfrac{5}{13}+\dfrac{14}{13}\mathrm{i}\}}$

7. C'est du cours (démonstration par récurrence).

8. Soit $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   (a) $z=\dfrac{\sqrt{2}}{1}(1+\mathrm{i})$ donc $z^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1+\mathrm{i})^2=\dfrac{2}{4}(1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)=\dfrac{1}{2}\times 2\mathrm{i}=\mathrm{i}$ donc $\boxed{z^2=\mathrm{i}}$.

   On en déduit que $z^4=\left(z^2\right)^2=\mathrm{i}^2=-1$.

   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $z^{4n}=\left(z^4\right)^n=\boxed{(-1)^n}\in\mathbb{R}$ donc z^{4n} est **réel** pour tout entier n naturel non nul.

Exercice IV (pour les non spécialistes) : Nouvelle Calédonie novembre 2015

1. $\begin{cases} d_1 &= \dfrac{1}{2}d_0+100=250\\ a_1 &= \dfrac{1}{2}d_0+\dfrac{1}{2}a_0+70=445\end{cases}$ donc $\boxed{d_1=250}$ et $\boxed{a_1=445}$.

2. (a) On obtient en sortie $\boxed{D=250}$ et $\boxed{A=420}$. Ces résultats ne sont **pas cohérents** avec ceux obtenus à la question 1.

   (b) Le problème de l'algorithme proposé est qu'il réutilise la variable D pour le calcul de A alors qu'elle a été modifiée.

   On corrige cela en utilisant une variable auxiliaire E, déclarée « nombre réel » dans l'initialisation :

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D, A et E sont des réels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	E prend la valeur D
	D prend la valeur $\dfrac{D}{2}+100$
	A prend la valeur $\dfrac{A}{2}+\dfrac{E}{2}+70$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

3. (a) Par définition, on a :

$$e_{n+1}=d_{n+1}-200=\frac{1}{2}d_n-100=\frac{1}{2}(d_n-200)=\boxed{\frac{1}{2}e_n}$$

   La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc **géométrique** de raison $\boxed{\dfrac{1}{2}}$ et de premier terme $e_0=d_0-200=\boxed{100}$.

(b) D'après la question précédente, on a $\boxed{e_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n e_0 = 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

$$\text{D'où } \ e_n = d_n - 200 \iff \boxed{d_n = 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200}$$

(c) Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ puis $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 200}$.

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc **convergente** vers 200.

4. (a) $2n^2-(n+1)^2 = n^2-2n-1$ qui a un discriminant Δ égal à 8>0. L'expression est positive à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines, donc pour n supérieur à la plus grande des racines, qui est $\dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2} \leqslant 3$. Pour $n \geqslant 3$, on a bien : $\boxed{2n^2 \geqslant n+1}$

(b) Effectuons une démonstration par récurrence :

- **Innitialisation :** Pour $n = 4$, on a bien $2^4 = 16 \geqslant 4^2 = 16$ donc la propriété est **initialisée**.
- **Hérédité** :Supposons qu'il existe un entier $k > 4$ tel que $2^k \geqslant k^2$. En multipliant les deux membres de l'inéquation par 2 et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$2^{k+1} \geqslant 2k^2 \geqslant (k+1)^2.$$

La propriété est donc **héréditaire**.

Initialisée et héréditaire, la propriété $2^n \geqslant n^2$ est donc vraie pour tout entier supérieur ou égal à 4.

(c) D'après la question précédente, si n est un entier supérieur ou égal à 4, on $0 < n^2 \leqslant 2^n$. En composant, cette inégalité par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en multipliant par 100, on obtient alors :

$$0 < \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \Longrightarrow 0 < 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2} = \frac{100}{n}$$

(d) D'après la question précédente et les théorèmes d'encadrement :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{100}{n} = 0$ et d'après les résultats sur les limites des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'après les résultats sur les limites de sommes, on obtient alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 340}$$