TS : correction du devoir sur feuille n° 4

I

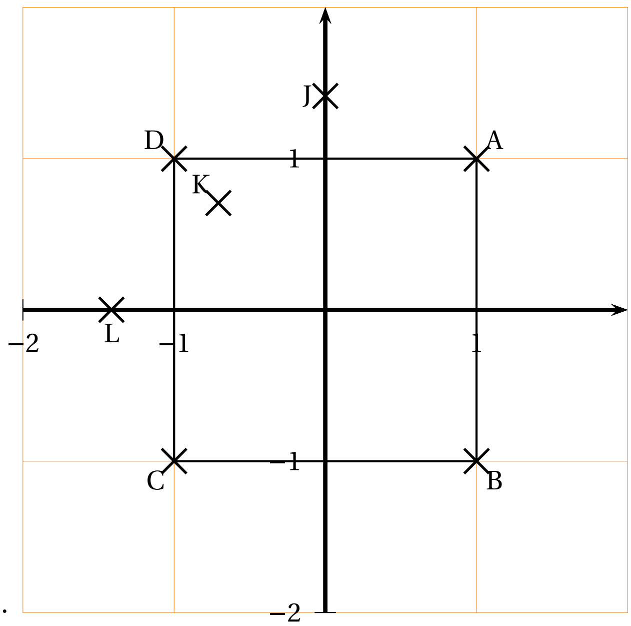
Partie A :

1. $P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3-\left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2+2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)-2\mathrm{i}\sqrt{2}=$
   $-2\mathrm{i}\sqrt{2}+4+2\mathrm{i}\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}-4-2\mathrm{i}\sqrt{2}=\boxed{0}$
   $\mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

2. (a) Développons : $\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$
   $=z^3+az^2+bz-z^2\mathrm{i}\sqrt{2}-az\mathrm{i}\sqrt{2}-b\mathrm{i}\sqrt{2}=z^3+\left(a-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2+\left(b-a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z-b\mathrm{i}\sqrt{2}.$
   Par identification avec l'énoncé, on obtient :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a-\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2-\mathrm{i}\sqrt{2} \\ b-a\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2+2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2\mathrm{i}\sqrt{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ b+2\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2+2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -b & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ b & = & 2 \\ b & = & 2 \end{array}\right.$$
   On a donc $\boxed{P(z)=\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)}$

   (b) En utilisant la factorisation précédente :
   $P(z)=0 \iff \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right).$
   Un produit de facteurs dans $\mathbb{C}$ est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul : $z-\mathrm{i}\sqrt{2}=0$ ou $z^2-2z+2=0$
   On retrouve la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$ Pour $z^2-2z+2=0$: $\Delta=-4$.
   Il y a donc deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{2-\mathrm{i}\sqrt{4}}{2}=1-\mathrm{i}$ et $\overline{1-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$.
   Les solutions sont donc : $\boxed{\mathscr{S}=\{\mathrm{i}\sqrt{2}\ ;\ 1+\mathrm{i}\ ;\ 1-\mathrm{i}\}}$.

Partie B :

1. 

2. On a $z_{\mathrm{K}}=\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}=\cos\dfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   K est le milieu du segment [JL], ce qui se traduit par $z_K=\dfrac{z_J+z_L}{2}$ d'où $z_L=2z_K-z_J=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}=\sqrt{2}$ donc
   $\boxed{z_K=\sqrt{2}}$

3. On a $|z_{\mathrm{A}}|^2=1^2+1^2=2$
   $|z_{\mathrm{B}}|^2=1^2+(-1)^2=2$
   $|z_{\mathrm{J}}|^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

$|z_{\mathrm{L}}|^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2.$

On a donc OA = OB = OJ = OL = $\sqrt{2}$: les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et le rayon $\sqrt{2}$.

4. (a) Un argument de z_{J} est $\dfrac{\pi}{2}$ et un argument de z_{D} est $\dfrac{3\pi}{4}$, donc l'angle de la rotation est $\dfrac{\pi}{4}$.

   (b) • $\left|\dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{L}} - z_{\mathrm{O}}}\right| = \dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OL}} = 1$ puisqu'une rotation conserve les longueurs.

   • $\arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{L}} - z_{\mathrm{O}}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

   On en déduit que $\dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{L}} - z_{\mathrm{O}}}$ est un nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{4}$, soit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, d'où le résultat.

   (c) On en déduit $z_C = z_L \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-1-\mathrm{i}}$

5. On a successivement :
   O est milieu de [BD] et [AC], donc ABCD est un parallélogramme ;
   $AC = BD = 2\sqrt{2}$, donc ABCD est un rectangle ;
   (AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc ABCD est un losange, donc finalement : ABCD est un **carré**.

II

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\overline{z}$.

$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \times \overline{z_1 z_2} = z_1\overline{z_1} \times z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2.$

Comme $|z_1 z_2|$ et $|z_1||z_2|$ sont positifs, on en déduit $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Partie B : Étude d'une transformation particulière

1. (a) On a $z_{\mathrm{C}'} = \dfrac{1-(-2+\mathrm{i})}{\overline{-2+\mathrm{i}}-1} = \dfrac{3-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \dfrac{(-3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i}(3-\mathrm{i})} = \dfrac{-9+1+3\mathrm{i}+3\mathrm{i}}{9+1} = \dfrac{8+6\mathrm{i}}{10} = \boxed{-\dfrac{4}{5}+\mathrm{i}\dfrac{3}{5}}$.

   (b) De $\left|z_{\mathrm{C}'}\right|^2 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25} + \dfrac{9}{25} = 1$, on déduit que le point C$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   $\left|z_{\mathrm{C}'}\right| = \mathrm{OC}' = 1$ ce qui montre que

   (c) Calculons $\dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}'} - z_{\mathrm{A}}} = \dfrac{-2+\mathrm{i}-1}{\frac{-4+3\mathrm{i}}{5} - 1} = \dfrac{-15+5\mathrm{i}}{-9+3\mathrm{i}} = \dfrac{5(-2+\mathrm{i})}{3(-3+\mathrm{i})} = \boxed{\dfrac{5}{3} \in \mathbb{R}}$.

   Un argument de ce quotient est donc 0, soit $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC'}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0 \pmod{\pi}$, ce qui signifie que les points A, C et C$'$ sont alignés.

2. Les points qui ont pour image le point A d'affixe 1 ont une affixe $z \neq 1$ telle que :
   $z' = 1 = \dfrac{1-z}{\overline{z}-1}$.
   En posant $z = x + \mathrm{i}y$, l'équation précédente s'écrit :
   $1 = \dfrac{1-x-\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y-1} \iff x - \mathrm{i}y - 1 = 1 - x - \mathrm{i}y \iff 2x - 2 = 0 \iff x = 1$
   Les points solutions ont donc pour affixe $z = 1 + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$: ce sont les points de la droite Δ d'équation $x = 1$ privée du point A

3. On a pour $z \neq 1$, $\quad \left|z'\right| = \left|\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}\right| = \dfrac{|1-z|}{|\overline{z}-1|} = \dfrac{|1-x-\mathrm{i}|}{|x-\mathrm{i}y-1|} = \dfrac{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 1.$
   On vient donc de démontrer que pour tout point M d'affixe $z \neq 1$,
   $\left|z'\right| = \mathrm{O}M' = 1.$
   Tous les points M' appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

4. Calculons pour $z \neq 1$, le quotient $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{\frac{1-z}{\overline{z}-1}-1}{z-1} = \dfrac{1-z-\overline{z}+1}{(z-1)((\overline{z}-1)}$.

   Le numérateur : $1-z-\overline{z}+1 = 2-\left(z+\overline{z}\right) = 2-2x \in \mathbb{R}$;

   Le dénominateur : $(z-1)((\overline{z}-1) = (z-1)\overline{z-1} = |z-1|^2 \in \mathbb{R}_+$ (réel positif). Finalement $\dfrac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{\left(\overrightarrow{\text{AM}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AM'}}\right) = 0\ [\pi]}$, ce qui signifie que les points A, M et M' sont **alignés**.

5. D'après la question précédente, D$'$ est aligné avec A et D, donc
   - D$'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$;
   - D$'$ est sur la droite (AD).

   La construction est donc **évidente**.

III

Partie A

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$
Affecter à U la valeur $3U-2k+3$
Fin pour
Sortie
Afficher U

N vaut 3, donc k varie de 0 à 2.
Les valeurs successives de U sont, après la valeur initiale 0 :

- $3\times 0-2\times 0+3 = 3$ donc U vaut $\boxed{3}$.
- $3\times 3-2\times 1+3 = 10$ donc U vaut $\boxed{10}$.
- $3\times 10-2\times 2+3 = 29$ donc U vaut $\boxed{29}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3$
   $u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 10$
2. (a) Démontrons par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   - **Initialisation :** $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$
   - **Hérédité** : on suppose la propriété vraie au rang n, donc $u_n \geqslant n$.
     Alors $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n+1$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$; elle est donc héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n}$.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ d'après le théorème des gendarmes.

3. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geqslant 2n - 2n + 3 = 3 \geqslant 0$ (car $u_n \geqslant n$ d'après la question précédente).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est **croissante**.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = (3u_n - 2n + 3) - (n+1) + 1 = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1)$ $= \boxed{3v_n}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + n - 1 = \boxed{3^n + n - 1}$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) Puisque la suite (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   (b) $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1$.
   $p > 0$ (d'après l'énoncé) donc $p \geqslant 1$; par conséquent, $3p - 1 \geqslant 0$.
   Alors : $27^p + 3p - 1 \geqslant 27^p \geqslant 10^p$, d'où $\boxed{n_0 \leqslant 3p}$.
   (c) On sait d'après la question précédente, que $n_0 \leqslant 3p = 3 \times 3 = 9$.
   À la calculatrice, on trouve $u_6 = 3^6 + 6 - 1 = 734$ et $u_7 = 2\,193 > 10^3$.
   On en déduit $\boxed{n_0 = 7}$.
   (d) Un algorithme serait de la forme :

- *Entrée* : Saisir le nombre entier naturel n
- *Traitement* :
  — Affecter à k la valeur 0
  — Tant que $3^k + k - 1 < 10^p$
  — Affecter à k la valeur $k + 1$
  Fin Tant que
- *Sortie* : Afficher la valeur de k

Voici un algorithme avec Algobox :

```
VARIABLES
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  U PREND_LA_VALEUR 0
  k PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (U<pow(10,p)) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR 3*U-2*k+3
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER k
FIN_ALGORITHME
```

IV

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.
   Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$: $\boxed{g'(x) = (x^2 + 2x)\,\mathrm{e}^x > 0}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   La fonction g est strictement **croissante** sur $[0\,;\,+\infty[$.

(b) $g(0)=-1<0$ et $g(1)=\mathrm{e}-1>0$. Dressons le tableau de variations de g :

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}-1$	$\nearrow$	

D'après ce tableau de variations, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$; on appelle a cette solution.

$g(0,703)\approx -0,0018<0$ et $g(0,704)\approx 0,002>0$ donc $\boxed{a\in[0,703;0,704]}$.

(c) D'après le tableau de variations de g :
- $g(x)<0$ sur $[0;a[$
- $g(x)>0$ sur $]a;+\infty[$

2. **Étude de la fonction f**

(a)
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}=+\infty\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=+\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{e}^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}=+\infty\Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty}$$

(b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

$$f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}\Longrightarrow f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2\mathrm{e}^x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

(c) Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On dresse le tableau de variation de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.

$f(a)=\mathrm{e}^a+\dfrac{1}{a}$. Or a est la solution de l'équation $g(x)=0$ donc

$g(a)=0\iff a^2\mathrm{e}^a-1=0\iff a^2\mathrm{e}^a=1\iff \mathrm{e}^a=\dfrac{1}{a^2}$.

On en déduit que $f(a)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}$ et on a donc démontré que la fonction f admettait pour minimum sur $]0\,;\,+\infty[$ le nombre réel $\boxed{m=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}}$.

(e) On a successivement(en valeurs approchées) :

$$\begin{array}{rcl}0,703<&a&<0,704\\ 0,4942<&a^2&<0,4957\\ \dfrac{1}{0,4957}<&\dfrac{1}{a^2}&<\dfrac{1}{0,4942}\\ 2,017<&\dfrac{1}{a^2}&<2,024\end{array}\qquad\Bigg|\qquad\begin{array}{rcl}0,703<&a&<0,704\\ \dfrac{1}{0,704}<&\dfrac{1}{a}&<\dfrac{1}{0,703}\\ 1,420<&\dfrac{1}{a}&<1,423\end{array}$$

donc par somme : $2,017+1,420<\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}<2,024+1,423$ et donc :

$\boxed{3,43<m<3,45}$