TS : devoir sur feuille n° 3

I Amérique du sud novembre 2008

1. $\boxed{\mathrm{F}(1\,;0\,;1),\ \mathrm{G}(1\,;2\,;1),\ \mathrm{H}(0\,;2\,;1)}$

2. (a) Le volume V est égal à : $\dfrac{\mathscr{A}(\mathrm{FGH})\times \mathrm{AE}}{3}$.
FGH est un triangle rectangle en G, donc $\mathscr{A}(\mathrm{FGH}) = \dfrac{\mathrm{FG}\times\mathrm{GH}}{2} = \dfrac{2\times 1}{2} = 1$ et comme AE $= 1$, $\mathrm{V} = \dfrac{1\times 1}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

(b) On a $\mathrm{I}(0\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{\mathrm{FI}} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{IH}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{\mathrm{FI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IH}} = 0+1-1 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux donc (FI) et (IH) sont perpendiculaires en I.
En prenant comme base le triangle FIH, $\boxed{V = \dfrac{\mathrm{FIH}\times d}{3}}$, d étant la distance du point G au plan (FIH). Le triangle FIH étant rectangle en I, son aire est égale à $\boxed{\dfrac{\mathrm{FI}\times\mathrm{IH}}{2}}$.
$\mathrm{FI}^2 = 1+1+1 = 3 \Rightarrow \mathrm{FI} = \sqrt{3}$;
$\mathrm{IH}^2 = 0+1+1 = 2 \Rightarrow \mathrm{IH} = \sqrt{2}$.
$\mathscr{A}(\mathrm{FIH}) = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$.
En reprenant l'écriture de V :
$\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times d \iff d = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$.

3. (a) On calcule :
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FI}} = -2+1+1 = 0$.
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IH}} = 0+1-1 = 0$.
$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (FIH) est orthogonal à ce plan.

(b) Une équation du plan (FIH) est donc de la forme : $2x+1y-1z+d' = 0$.
Comme $\mathrm{F}\in(\mathrm{FIH})$ ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus soit :
$0+1-0+d' = 0 \iff d' = -1$.
Une équation du plan (FIH) est donc : $\boxed{2x+1y-1z-1 = 0}$

$$M(x\,;\ y\,;\ z)\in(\mathrm{FIH}) \iff 2x+y-z-1 = 0$$

(c) On sait que la distance d de G au plan (FIH) est : $\dfrac{|2x_{\mathrm{G}}+y_{\mathrm{G}}-z_{\mathrm{G}}-1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|2+2-1-1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$.
On retrouve la même valeur qu' au **2. b.**

4. (a) (AG) est perpendiculaire au plan (FIH) si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est colinéaire à $\vec{n}$. Or $\overrightarrow{\mathrm{AG}}(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ qui n'est manifestement pas colinéaire à $\vec{n}$.

(b) $M(x\ ;\ ;y\ ;\ z)\in(\mathrm{AG}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ qui se traduit par :

$$M(x\,;\ y\,;\ z)\in(\mathrm{AG}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t\\ y & = & 2t\\ z & = & t\end{array}\right.$$

(c) Il faut résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t\\ y & = & 2t\\ z & = & t\\ 2x+y-z-1 & = & 0\end{array}\right.$$

$\Rightarrow 2t+2t-t-1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \dfrac{1}{3}$

Les coordonnées de K sont donc $\boxed{\left(\dfrac{1}{3}\,;\ \dfrac{2}{3}\,;\ \dfrac{1}{3}\right)}$.

5. Le rayon de la sphère est GK.
Or $\mathrm{GK}^2 = \dfrac{4}{9}+\dfrac{16}{9}+\dfrac{4}{9} = \dfrac{24}{9} \Rightarrow \mathrm{GK} = \sqrt{\dfrac{24}{9}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$.
Or la distance d de G au plan (FIH) est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; elle est donc inférieure au rayon de la sphère et par conséquent la section de la sphère par le plan (FIH) est un **cercle**.

II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. $(x-1)^3 = (x-1)(x-1)^2 = (x-1)\left(x^2-2x+1\right)$
$= x^3-2x^2+x-x^2+2x-1 = \boxed{x^3-3x^2+3x-1}$.
Pour tout $x\neq 0$, $ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2} = \dfrac{(ax^3+bx^2+cx+d)}{x^2}$.
Par identification des coefficients, on trouve :
$a = 1$, $b = -3$, $c = 3$ et $d = -1$
d'où $\boxed{f(x) = x-3+\dfrac{3x-1}{x^2}}$

2. **Étude des limites** :
   - en $-\infty$:
   $\dfrac{3x-1}{x^2} = \dfrac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{x}$ donc
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-1}{x^2}\right) = 0$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3) = -\infty$.
   On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

- En $+\infty$:
  De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-1}{x^2}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.
- En 0 :
  $\lim\limits_{x\to0}(x-1)^3=-1$; $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ avec $x^2>0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty}$.

3. - On a $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ donc $\mathscr{C}$ a pour asymptote la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x=0$ (axe des ordonnées).
   - Pour tout $x\neq0$, $f(x)-(x-3)=\dfrac{3x-1}{x^2}$ et on a vu que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x-1}{x^2}\right)=0$ donc la droite $\mathscr{D}'$ d'équation $y=x-3$ est **asymptote** à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
4. $\forall x\neq0$, $f(x)-(x-3)=\dfrac{3x-1}{x^2}$ qui est du signe de $3x-1$, donc négatif pour $x\leqslant\dfrac13$ et positif pour $x\geqslant\dfrac13$.
   On en déduit que $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}'$ sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $\left]0\,;\,\dfrac13\right[$ et en dessous sur $\left[\dfrac13\,;\,+\infty\right[$
5. On peut voir f comme $\dfrac{u^3}{v}$ avec $\begin{cases}u(x)=x-1\\ v(x)=x^2\end{cases}$
   $f'=\left(\dfrac{u^3}{v}\right)'=\dfrac{\left(u^3\right)'v-u^3v'}{v^2}=\dfrac{3u'u^2v-u^3v'}{v^2}$ avec $\begin{cases}u'(x)=1\\ v'(x)=2x\end{cases}$

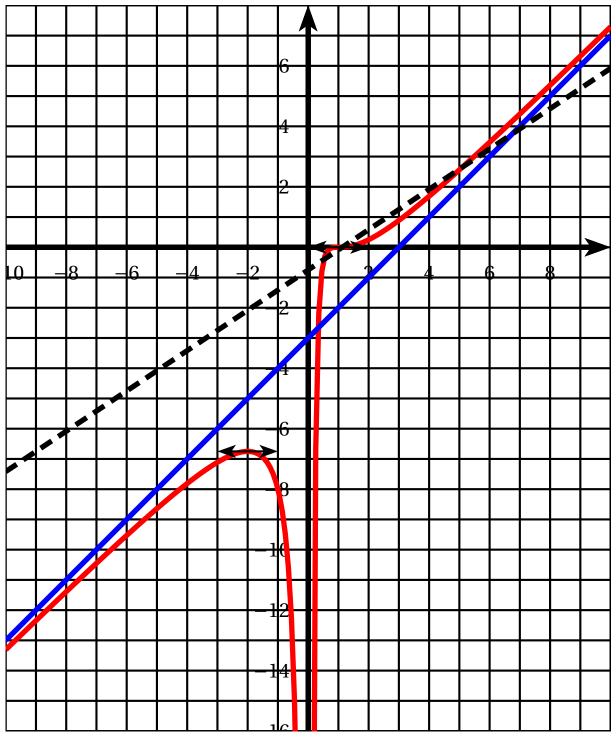
   Alors : $f'(x)=\dfrac{3\times1(x-1)^2x^2-2x(x-1)^3}{x^4}=\dfrac{x(x-1)^2(3x-2(x-1))}{x^4}=\boxed{\dfrac{x(x-1)^2(x+2)}{x^4}}$.

   $x^4>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(x-1)^2(x+2)$ qui s'annule en -2, 0 et 1 avec $(x-1)^2\geqslant0$.

   Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	||	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{27}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   Remarque : $f'(1)=0$ donc la courbe admet en 1 une tangente horizontale.
6. $\mathscr{D}'$ a pour coefficient directeur le nombre 1. On résout l'équation $f'(x)=1$.
   $f'(x)=1\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}=1\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=x^3\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)(x+2)=x^3-3x+2=x^3\Leftrightarrow-3x+2=0\Leftrightarrow x=\dfrac23$.
   L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ en $\dfrac23$ est $y=f'\left(\dfrac23\right)\left(x-\dfrac23\right)+f\left(\dfrac23\right)$, donc $y=x-\dfrac23-\dfrac1{12}$ soit $\boxed{y=x-\dfrac34}$
7. Graphique :



8. Soit D_λ la droite d'équation $y=x+\lambda$ où λ est un paramètre réel. D_λ a pour coefficient directeur 1, donc est parallèle à $\mathscr{D}'$.
   - Pour $\lambda<-3$, $\mathscr{D}_\lambda$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points.
   - Pour $\lambda=-3$, $\mathscr{D}_\lambda$ coupe $\mathscr{C}$ en un seul point, puisque c'est l'asymptote à la courbe zr on a vu à la question 4. qu'elles ne se coupaient qu'en $x=\dfrac13$.
   - Pour $-3\leqslant\lambda<-\dfrac34$, $\mathscr{D}_\lambda$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points.
   - Pour $\lambda=-\dfrac34$, $\mathscr{D}_\lambda$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points (dont le point de tangence $\mathscr{C}$).
   - Pour $\lambda>-\dfrac34$, il y a un seul point d'intersection entre $\mathscr{D}_\lambda$ et $\mathscr{C}$.

III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2+4x$.

1. (a) f est dérivable comme fonction polynôme sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x)=x^3-3x+4}$.

   (b) f' est elle-même une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=3x^2-3$
   $=3\left(x^2-1\right)=\boxed{3(x+1)(x-1)}$.

2. (a) $f''(x)$ est un trinôme du second degré, dont les racines sont -1 et 1. le coefficient de x^2 est 3 donc $f''(x)$ est positif (du signe de 3) en dehors des racines et négatif entre les racines.
   On en déduit que f' est croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[1\,;=\infty[$ et décroissante sur [-1 ; 1].

   (b) $f'(x)=x^3\left(1-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{x^3}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\dfrac{4}{x^3}\right)=1$ donc
   $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty}$.
   De même (mêmes calculs), on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to=\infty}f'(x)=+\infty}$

   Tableau de variation de f' :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

   D'après le tableau de variation, il est clair que $f'(x)>0$ sur $[1\,;+\infty[$.
   Sur $]-\infty\,;-1]$, f' est continue, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ et $f'(-1)=6>0$, donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, m'équation $f'(x)=0$ admet un solution dans l'intervalle $]-\infty\,;-1]$; comme f' est croissante sur cet intervalle, la slutio n est unique ; on la note α.

   (c) À la calculatrice, on trouve $\boxed{-2,20<\alpha<-2,19}$

3. (a) $f'(x)<0$ pour $x<\alpha$, $f'(\alpha)=0$ et $f'((x)>0$ pour $x>\alpha$.

   Résumé :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   (b) Pour tout $x\neq 0$, $f(x)=x^4\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{-}2x^2+\dfrac{4}{x^3}\right)$.
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{-}2x^2+\dfrac{4}{x^3}\right)=\dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^4=+\infty$
   donc $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty}$.

   Tableau de variation :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

   (c) par définition, $\alpha^3=3\alpha-4$.
   Alors : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^4-6\alpha^2+16\alpha}{4}=\dfrac{\alpha\left(\alpha^3-6\alpha+16\right)}{4}$
   $=\dfrac{\alpha(3\alpha-4-6\alpha=16)}{4}=\dfrac{\alpha(-3\alpha+12)}{4}$
   $=\boxed{\dfrac{3\alpha(4-\alpha)}{4}}$.

   (d) On a vu que $\alpha\approx-2,2$, donc
   $f(\alpha)\approx\dfrac{3\times(-2,2)\times 4+2,2}{4}\approx\boxed{-10,23<0}$.
   Sur $]-\infty\,;\alpha]$, f est continue, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $f(\alpha)<0$, donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, m'équation $f(x)=0$ admet une solution (unique puisque f est décroissante sur cet intervalle).
   On montre de même que $f(x)=0$ a une solution unique sur $[\alpha\,;+\infty[$.
   Le polynôme a donc deux racines (dont 0 qui est une racine évidente).

IV Nouvelle Calédonie novembre 2013

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

PARTIE A

Variables : N est un entier
U, V, W sont des réels
K est un entier
Début : Affecter 0 à K
Affecter 2 à U
Affecter 10 à V
Saisir N
Tant que $K < N$
  Affecter $K+1$ à K
  Affecter U à W
  Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
  Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
Fin tant que
Afficher U
Afficher V
Fin

État des variables :

K	W	U	V
0	—	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

PARTIE B

1. (a) Pour tout entier naturel n,
$v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n+3v_n}{4} - \dfrac{2u_n+v_n}{3} = \dfrac{3(u_n+3v_n)}{12} - \dfrac{4(2u_n+v_n)}{12} v_{n+1} - u_{n+1}$
$= \dfrac{3u_n+9v_n-8u_n-4v_n}{12} = \dfrac{5v_n-5u_n}{12}$
$= \boxed{\dfrac{5}{12}(v_n-u_n)}$

(b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.
D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est **géométrique** de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.
D'après le cours (forme explicite d'une suite géométrique) on peut dire que, pour tout entier naturel n, $\boxed{w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n}$.

2. (a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n+v_n}{3} - \dfrac{3u_n}{3} = \dfrac{2u_n+v_n-3u_n}{3} = \dfrac{v_n-u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$
On a vu que, pour tout n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n > 0$ et donc que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.
Donc la suite (u_n) est **croissante**.
$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+3v_n}{4} - \dfrac{4v_n}{4} = \dfrac{u_n+3v_n-4v_n}{4} = \dfrac{u_n-v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4}$
Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.
Donc la suite (v_n) est **décroissante**.

(b) On a vu que, pour tout n, $w_n > 0$; donc, pour tout n, $v_n - u_n > 0$ c'est-à -dire $v_n > u_n$.
La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.
Pour tout entier naturel n,
$\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ v_n \leqslant (10 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \leqslant (10.$
La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n \geqslant (u_0 \iff u_n \geqslant (2.$
Pour tout entier naturel n,
$\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant (2 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n \geqslant (2.$

(c) La suite (u_n) est **croissante et majorée** par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est **convergente** vers un réel ℓ_u.
La suite (v_n) est **décroissante et minorée** par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est **convergente** vers un réel ℓ_v.

3. La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_v - \ell_u$.
Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$; donc on peut dire que la suite (w_n) est convergente vers 0.
La limite d'une suite est unique donc $\ell_v - \ell_u = 0$ et donc $\ell_v = \ell_u$; les suites (u_n) et (v_n) ont donc la màªme limite qu'on appelle ℓ.

4. $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \dfrac{2u_n+v_n}{3} + 4 \times \dfrac{u_n+3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$
$= 3u_n + 4v_n = t_n$ donc la suite (t_n) est **constante**.
$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = \boxed{46}$
Comme la suite (t_n) est constante, pour tout n, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.
Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = \boxed{7\ell}$.
La limite d'une suite est unique donc $7\ell = 46 \iff \ell = \boxed{\dfrac{46}{7}}$.
La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est donc $\dfrac{46}{7}$.