TS : correction du devoir sur feuillen° 2

I

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2.$$

C'est une somme de n termes, puisque les termes vont de $2\times 1-1$ à $2n-1$.

- **initialisation** : pour $n=1$, la somme S_1 vaut 1 et $1^2=1$ donc $S_1=1^2$; la propriété est vraie pour le rang $n=1$.
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie à un rang n quelconque, donc $S_n=n^2$.
  Alors : $S_{n+1}=S_n+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$ donc la propriété st héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

II

On considère la suite (u_n) construite ainsi : $u_1=0,1$; $u_2=0,12$; $u_3=0,123$, $u_4=0,1234$; $\dots$; $u_{10}=0,12345678910$; etc.
u_n est obtenu en mettant bout à bout après la virgule les écritures décimales des entiers de 1 à n.

1. $\boxed{u_{11}=0,1234567891011}$.
2. Cette suite est clairement **croissante** et **majorée**, par exemple par 1 elle est donc **convergente**.

   Remarque : La limite s'appelle **nombre de Champernowne**

   Pour en savoir davantage sur cette suite, voir par exemple ici

III

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ; justifier ou donner un contre-exemple.
(u_n) et (v_n) sont des suites réelles.

1. On suppose que (u_n) et (v_n) sont des suites à termes positifs et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$.

   VRAI car, $u_n+v_n \geqslant u_n$ (théorème des gendarmes ou théorème de comparaison).

   Attention, il n'est pas dit dans l'énoncé que la suite (v_n) converge !
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ et si $v_n>u_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

   FAUX ; ; prenons par exemple $u_n=n$ et $v_n=n+1$; alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)=1\neq 0}$.
3. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$. Alors, les termes u_n sont tous positifs à partir d'un certain rang.

   VRAI : Considérons l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$, centré sur 1.

   Puisque la suite converge vers 1, il existe p tel que, pour tout $n\geqslant p$, $u_n\in\left]\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$. Les termes sont donc tous positifs partir de $n=p$.
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$, alors (u_n) et (v_n) convergent toutes deux et ce vers la même limite.

   FAUX ; il suffit de prendre $u_n=v_n=n$; alors $u_n-v_n=0$ pour tout n donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ mais les deux suites divergent.

IV

Répondre par VRAI ou FAUX aux questions suivantes en justifiant .
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2}=\dfrac{1}{3}u_{n+1}+\dfrac{2}{3}u_n$.
On définit les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par $v_n=u_{n+1}-u_n$ et $w_n=u_{n+1}+\dfrac{2}{3}u_n$.

1. $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}$
   $=\dfrac{1}{3}u_{n+1}+\dfrac{2}{3}u_n-u_{n+1}=-\dfrac{2}{3}u_{n+1}+\dfrac{2}{3}u_n$
   $=-\dfrac{2}{3}(u_{n+1}-u_n)=-\dfrac{2}{3}v_n$.

   La suite (v_n) est géométrique et non arithmétique, donc **FAUX**
2. $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}=u_{n+2}+\dfrac{2}{3}u_{n+1}$
   $=\dfrac{1}{3}u_{n+1}+\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{2}{3}u_{n+1}=u_{n+1}+\dfrac{2}{3}u_n=w_n$.

   La suite (w_n) est bien constante : **VRAI**
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}-v_{n+1}$
   $=u_{n+2}+\dfrac{2}{3}u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+1})=\dfrac{5}{3}u_{n+1}$ donc

$u_{n+1} = \frac{3}{5}w_{n+1}$. Comme c'est vrai aussi pour $n=0$, pour tout n, on a $u_n = \frac{3}{5}(w_n - u_n)$ donc **VRAI**.

4. Pour tout n, $w_n = w_0 = 1$ (suite constante).

   (v_n) est géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ avec $v_0 = 1$ donc $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

   Alors, pour tout n : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$ $= \boxed{\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}$.

   $-1 < -\frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{5}}$ donc **FAUX**

V

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$.

   $u_2 - u_1 = \frac{1}{4}$ et $u_1 - u_0 = \frac{3}{2}$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

   $\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

   (a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$ donc $\boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$; $\boxed{w_0 = -1}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $wn+1 = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$ $= \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{u_n}{v_n} = \boxed{2 + \frac{u_n}{v_n}}$.

   (c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{w_{n+1} = w_n + 2}$.

   (d) On en déduit que la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = 2$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + nr$ donc $\boxed{w_n = 2n - 1}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n \times w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (2n-1)$ $= \boxed{\frac{2n-1}{2^n}}$

5. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

   Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

   - **Initialisation :** Pour $n =$, $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2n+3}{2^n} = 2 - \frac{3}{1} = 2 - 3 = -1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité** : on suppose la propriété vraie à un rang n quelconque, donc $S_n = \frac{2n+3}{2^n}$.

     Alors $S_{n+1} = S_n = u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$

$= 2 - \dfrac{2(2n+3)-(2n+1]}{2^{n+1}} = 2 - \dfrac{2n+5}{2^{n+1}}$

$= 2 - \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$.

La propriété est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout n, donc $\boxed{S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}}$

VI Légende de l'échiquier

Notons :

- N : nombre de grains de blé placés sur l'échiquier
- m : masse d'un grain de blé
- M : masse de la production mondiale annuelle
- v : volume d'un grain de blé
- V : volume total occupé par tous les grains de blé placés sur l'échiquier
- h : hauteur du silo servant à les entreposer.

1. $N = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = \dfrac{2^{64}-1}{2-1} = \boxed{2^{64}-1}$ somme de stermes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.

   $N = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx \boxed{1,84 \times 1P^{19}}$.
2. On considère que 1000 grains ont une masse de 43 g.On en déduit que : $m = \dfrac{43}{1000}$ g, soit 43×10^{-6} kg, donc $\boxed{m = 4,3 \times 10^{-5}\text{ kg}}$.

   La masse des grains de blé placés sur échiquier vaut :

   $M = Nm \approx 1,84 \times 10^{19} \times 4,3 \times 10^{-5} \approx \boxed{7,912 \times 10^{14}\text{ kg}}$
3. La production mondiale de blé en 2013 fut de 653 millions de tonnes. $\mu = 653 \times 10^9$ kg donc $\boxed{\mu = 6,53 \times 10^{11}\text{ kg}}$.

   $\dfrac{M}{\mu} \approx \dfrac{7,912 \times 10^{14}}{6,53 \times 10^{11}} \approx \boxed{1211}$.

   La masse de grains de blé sur l'échiquier serait 1 211 celle de la production mondiale en 2013 !

   On peut en conclure que c'est impossible, donc c'est bien une légende.
4. Le volume d'un grain de blé est

   $v = 20 \times \left(10^{-3}\right)^3\text{ m}^3 = \boxed{2 \times 10^{-8}\text{ m}^3}$.

   Le volume total occupé par les gains de blé serait $V = Nv$.

   $V \approx 1,84 \times 1P^{19} \times 2 \times 10^{-8} \approx \boxed{3,8 \times 10^{11}\text{ m}^3}$
5. IOn aurait $V = 100^2 h = 10^4 \times h$ donc $h = \dfrac{V}{10^4} \approx 3,8 \times 10^7$ m $\approx 3,8 \times 10^4$ km, soit environ 38 000 km (un dixième de la distance moyenne entre la Terre et la lune)

VII

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}.$$

1. $u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $u_2 = \boxed{\dfrac{18}{19}}$
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \dfrac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \dfrac{\frac{2u_n+3-u_n-4}{u_n+4}}{\frac{2u_n+3+3u_n+12}{u_n+4}} = \dfrac{u_n-1}{5u_n+15} = \dfrac{u_n-1}{5(u_n+3)} = \boxed{\dfrac{1}{5}v_n}$.

   La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $q = \dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{1}{3}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$ dpnc $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$
4. $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3} \Leftrightarrow v_n(u_n+3) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n v_n + 3v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -3v_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -3v_n - 1$ d'où $u_n = \dfrac{-3v_n-1}{v_n-1}$ donc $u_n = \boxed{\dfrac{1+3v_n}{1-v_n}}$.
5. On en déduit $\boxed{u_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n} = \dfrac{1-\frac{1}{5^n}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^n}}}$

   Pour $n = 1$, on trouve $\dfrac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{16}{15}} = \dfrac{3}{4} = u_1$

   Pour $n = 2$, on trouve $\dfrac{1-\frac{1}{25}}{1+\frac{1}{75}} = \dfrac{\frac{24}{25}}{\frac{76}{75}} = \dfrac{24}{25} \times \dfrac{75}{76} = \dfrac{72}{76} = \dfrac{18}{19} = u_2$.‘

   on retrouve les termes calculés au début.
6. $-1 < q = \dfrac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1-v_n}$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

VIII Nombre d'or et suite de Fibonacci

On considère la suite (u_n) de Fibonacci définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On pose $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. $\phi^2 = \left(\dfrac{1\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 1+\phi$ donc $\boxed{\phi^2 = \phi+1}$

2. On en déduit :

   - $\phi^3 = \phi \times \phi^2 = \phi\left(1+\phi\right) = \phi + \phi^2 = \phi+\phi+1$

     $= \boxed{2\phi+1}$

   - $\phi^4 = \phi \times \phi^3 = \phi(2\phi+1) = 2\phi^2+\phi$
     $= 2(\phi+1)+\phi = \boxed{3\phi+2}$

   - $\phi^5 = \phi \times \phi^4 = \phi(3\phi+2) = 3\phi^2+2\phi$
     $= 3(\phi+1)+2\phi = \boxed{5\phi+3}$

3. Soit P_n la proposition « $\phi^n = a_n\phi + b_n$ ». Effectuons une démonstration par récurrence :

   - Initialisation : pour $n = 0$, $\phi^0 = 1 = 0\phi+1$
     $= a_0\phi + b_0$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

   - Hérédité : on suppose que $\phi^n = a_n\phi + b_n$ pour un entier n avec a_n et b_n tentiers.

     Alors : $\phi^{n+2} = \phi \times \phi^n = \phi\left[\left(a_n\phi+b_n\right)\right] = a_n\phi^2 + b_n\phi = a_n(\phi+1) + b_n\phi$
     $= \boxed{\left(a_n+b_n\right)\phi + a_n = a_{n+1}\phi + b_{n+1}}$ en posant $a_{n+1} = a_n + b_n \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} = a_n \in \mathbb{N}$.

     La propriété est héréditaire.

   D'après l'acide de récurrence, elle est vraie pour tout n donc $\phi^n = a_n\phi + b_n$, a_n et b_n entiers naturels

4. On en déduit : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

5. **Algorithme :**

Variables	n est un entier naturel i est un entier naturel a est un entier naturel b est un entier naturel c est un entier naturel
Initialisation	Demander à l'utilisateur de choisir la valeur de n Affecter à i la valeur 0 Affecter à a la valeur 0 Affecter à b la valeur 1
Traitement	Tant que $i < n$ Affecter à c la valeur a Affecter à a la valeur $c+b$ Affecter à b la valeur c Affecter à i la valeur $i+1$
Affichage	Afficher a et b

Le code à taper dans Algobox serait :

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Choisir la valeur de n"
  LIRE n
  i PREND_LA_VALEUR 0
  a PREND_LA_VALEUR 0
  b PREND_LA_VALEUR 1
  c PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (i<n) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    c PREND_LA_VALEUR a
    a PREND_LA_VALEUR c+b
    b PREND_LA_VALEUR c
    i PREND_LA_VALEUR i+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "Les valeurs de a et b sont :"
  AFFICHER a
  AFFICHER " et "
  AFFICHER b
FIN_ALGORITHME
```