Correction de la feuille d'exercices n° 1

Asie juin 2010 partie A

1. **Étude des limites**

   (a) • $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$,donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty}$;

   • $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$,

   donc par produit de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, donc par produit de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

   (c) La première limite montre que l'axe des ordonnées est **asymptote** à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.
   La seconde montre que l'axe des abscisses est **asymptote** à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

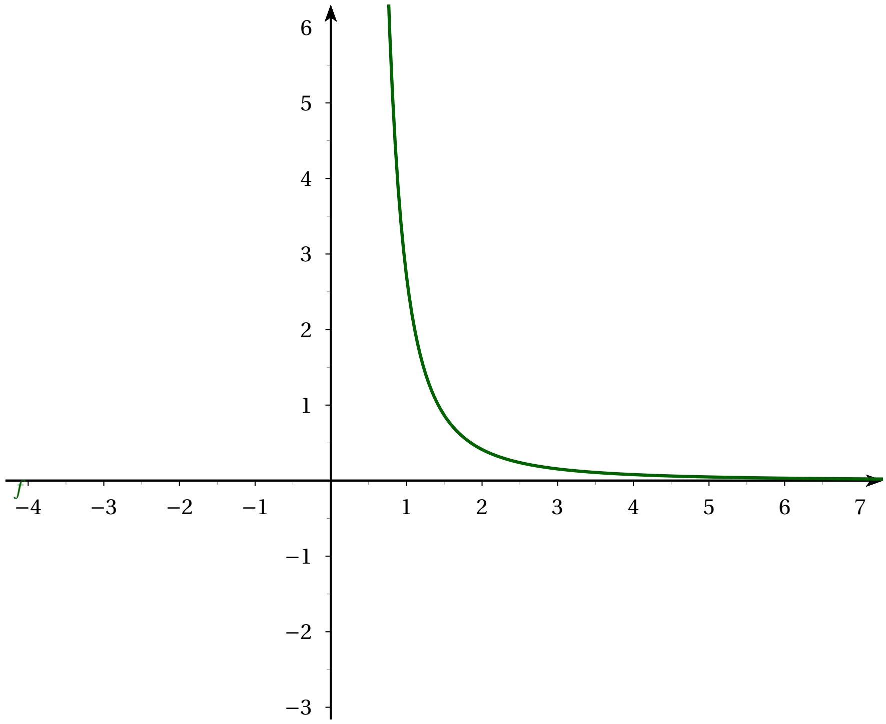
2. Étude des variations de la fonction f

   (a) $f(x)$ étant considéré comme un produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

   $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)' = -\dfrac{2x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{2x}{x^4} + \dfrac{1}{x^4}\right) = \boxed{-\dfrac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1)}$.

   (b) On a $x > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow 2x+1 > 1 > 0$; d'autre part quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^u > 0$. Enfin $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^4} > 0$,
   donc finalement pour tout réel supérieur à zéro,
   $f'(x) < 0$.
   Il en résulte que la fonction f est **décroissante** sur $]0\,;\,+\infty[$ de plus l'infini à zéro d'après la première question.

   (c) D'après le résultat précédent (décroissance de f de plus l'infini à zéro sur $]0\,;\,+\infty[$), la fonction f continue car dérivable sur cet intervalle il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne :
   $f(1,1) \approx 2,05$ et $f(1,2) \approx 1,60$ donc $1,1 < \alpha < 1,2$;
   $f(1,10) \approx 2,05$ et $f(1,11) \approx 1,99$ donc $1,10 < \alpha < 1,11$.
   La valeur approchée au centième de α est donc $\boxed{\alpha \approx 1,11}$.

3. 

Polynésie septembre 2010

Partie 1

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1$.
   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$, donc par produit des limites : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$.
2. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ est **dérivable** et sur $[0~;~+\infty[$:
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = \boxed{-x\mathrm{e}^x}$.
   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $[0~;~+\infty[$.
   g est donc décroissante sur $[0~;~+\infty[$ de $g(0) = 2$ ‡ $-\infty$.
3. Donner le tableau de variations de g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. (a) Sur $[0~;~+\infty[$, g dérivable est donc continue et décroissante, $g(0) > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
   Il existe donc un réel unique $\alpha \in [0~;~+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

   (b) La calculatrice donne :
   - $g(1) = 1$ et $g(2) \approx -6,4$, donc $1 < \alpha < 2$;
   - $g(1,2) \approx 0,3$ et $g(1,3) \approx -0,1$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$;
   - $g(1,27) \approx 0,04$ et $g(1,28) \approx -0,007$, donc $\boxed{1,27 < \alpha < 1,28}$.

   (c) On a $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \mathrm{e}^\alpha = \boxed{\dfrac{1}{\alpha-1}}$.
5. On a donc $g(x) > 0$ sur $[0~;~\alpha[$;
   $g(\alpha) = 0$;
   $g(x) < 0$ sur $[\alpha~;~+\infty[$.

Partie 2

1. La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable et sur cet intervalle :
   $$A'(x) = \frac{4\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 4x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \frac{4\left(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \boxed{\frac{4g(x)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}}.$$
   Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
   D'après la précédente question on a donc :
   $A'(x) > 0$ sur $[0~;~\alpha[$;
   $A'(\alpha) = 0$;
   $A' < 0$ sur $[\alpha~;~+\infty[$.
2. On a donc :
   $A(x)$ est **croissante** sur $[0~;~\alpha[$ et **décroissante** sur $[\alpha~;~+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie 3

1. On sait que $x \geqslant 0$, donc l'aire du rectangle OPMQ est égale ‡ $x \times f(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1} = A(x)$.

   Or on a vu que la fonction présente un maximum pour $x = \alpha$.

2. Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal ‡ $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = -\dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}}{\alpha} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)}$.

   Or on a vu que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, donc le coefficient directeur est égal :

   $-\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)} = -\dfrac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.

   La tangente en $M(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

   Or $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}$, donc

   $f'(\alpha) = -\dfrac{4\mathrm{e}^{\alpha}}{\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)^2} = -\dfrac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2} = -\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.

   Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont **parallèles**.

ANNEXE