TS : contrôle sur la fonction exponentielle (2 heures)

I (2 points)

Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{x^2+2x}=e$

b) $e^{3x^2}=e^{5x-1}$.

II (2,5 points)

Résoudre les inéquations :

a) $e^{\frac{3}{x}}>e^{1-x}$

b) $e^x-\dfrac{1}{e^x}>0$

III (2,5 points)

Déterminer, en justifiant, la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^2+2-e^x$

b) $g(x)=\dfrac{2e^x-x}{x^2}$

IV (4 points)

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=x\left(e^x-e\right)+e-2$.

1. Soit g la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
   Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g''(x)=(x+2)e^x$.
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Etablir que l'équation $g'(x)=0$admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

V (4,5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{x}{e^x-x}.$$

On note sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^x-x-1$.
   (a) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x, e^x-x est strictement positif.
2. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
3. (a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   (b) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
   (c) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

VI (4,5 points)

On considère les points B(100 ; 100) et C$\left(50\,;\,\dfrac{50}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ est donnée ci-dessous.

On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- pour tout réel x, $f(x) = x\mathrm{e}^{ax+b}$.
- les points B et C appartiennent 'a la courbe Γ.

1. (a) Montrer que le couple $(a\,;\,b)$ est solution du système : $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

   (b) En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = x\mathrm{e}^{0,01x-1}$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{100}{\mathrm{e}} \times 0,01x\mathrm{e}^{0,01x}$.

   (b) En déduire la limite de f en $-\infty$
4. Etudier les variations de f. On donnera le tableau de variations complet.
5. Etudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D).