Exercices sur les complexes (feuille 1)

Exercice I (D'après Liban mai 2003)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$4z^2 - 12z + 153 = 0.$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{3}{2} + 6\text{i},\ z_B = \frac{3}{2} - 6\text{i}\,;\ z_C = -3 - \frac{1}{4}\text{i},\ z_P = 3 + 2\text{i}$$

et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}\text{i}$.

   (a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\vec{w}$.

   (b) Déterminer l'affixe z_R du point R, défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{CR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}$.

   (c) Déterminer l'affixe z_S du point S, défini par $z_S - z_A = -\text{i}\left(z_P - z_A\right)$.

   (d) Placer les points P, Q, R et S.

3. (a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

   (b) Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.
   En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

   (c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.

4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$?

Exercice II

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.
On désigne par A, B et J les points d'affixes respectives $-\text{i}$, $1-\text{i}$ et i.
On désigne par Δ la médiatrice du segment [AB] et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

À tout point M d'affixe z distincte de $1-\text{i}$, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\text{i}(z+\text{i})}{z-1+\text{i}}$$

Le point M' est appelé image du point M.

1. Calculer les affixes des points A' et O'.
2. Faure une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice. (unité graphique 4 cm).
3. Montrer que l'équation $z = \dfrac{\text{i}(z+\text{i})}{z-1+\text{i}}$ admet deux solutions que l'on précisera.
   On note E et F les points qui ont pour affixes respectives ces solutions.
4. Justifier que les points E et F appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ et les placer sur la figure.
5. Soit M un point distinct du point B et soit M' son image.

   (a) Exprimer la distance OM' en fonction des distances AM et BM.

   (b) En déduire que si le point M décrit la droite Δ, alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

   (c) Montrer que si le point M décrit la droite (AB) privée du point B, alors le point M' appartient à une droite que l'on préciser.

Exercice III Antilles-Guyane septembre 2008 (sauf la fin)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\text{e}^x}{\text{e}^x + 3}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   (b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   (c) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_1$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{\text{e}^x - 3}{\text{e}^x + 3}\right)^2$$

   (b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. (a) Que peut-on dire de la tangente $\mathscr{D}_2$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?

   (b) En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}_2$.

4. (a) Montrer que la tangente $\mathscr{D}_3$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + 1$.

   (b) ÉTtudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 3]$.
   On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{12\text{e}^x\left(\text{e}^x - 3\right)}{\left(\text{e}^x + 3\right)^3}.$$

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
   Tracer la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.