

TS1-TS2 : devoir sur table commun n° 6 (4 heures)

Il faut traiter les exercices I, II, III et l'exercice IV (en fonction de l'enseignement de spécialité suivi).

EXERCICE I

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Le graphique sera fait sur la feuille annexe et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f .

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$.

Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

(a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

(b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

EXERCICE II

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- r
- $x = 0$ pour le blanc ;
 - $x = 1$ pour le noir ;
 - $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes. Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

- (a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
(b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0 ; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

- (a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$: $g'(x) = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}$;

- (b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.
- (c) Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0 ; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$.
On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale) y (nuance retouchée) E (écart) c (compteur) k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire x prend la valeur $\frac{k}{100}$ y prend la valeur $f(x)$ E prend la valeur $ y - x $ Si $E \geq 0,05$, faire c prend la valeur $c + 1$ Fin si
Sortie :	Fin pour Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Partie C

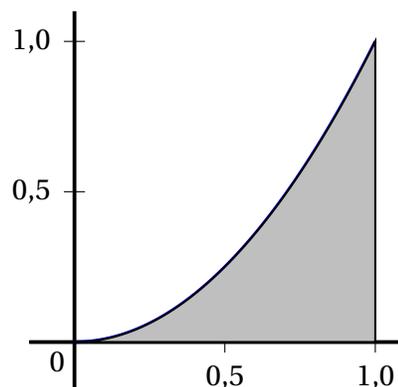
Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $f(x) \leq x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire \mathcal{A}_f de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_1(x) = xe^{(x^2-1)} \quad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. (a) Calculer \mathcal{A}_{f_1} .
(b) Calculer \mathcal{A}_{f_2}
2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?



EXERCICE III

Dans un stand, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles. La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement « La n -ième cible est atteinte » ;
- B_n l'évènement « La n -ième cible n'est pas atteinte » ;
- a_n la probabilité de l'évènement A_n ;
- b_n la probabilité de l'évènement B_n .

1. Donner les valeurs de a_1 et b_1 .

Calculer a_2 et b_2 . On peut utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout n entier supérieur ou égal 1, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$, puis $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

3. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = a_n - \frac{2}{3}$.

(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Préciser son premier terme u_1 .

(b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis l'expression de a_n en fonction de n .

(c) Déterminer la limite de la suite (a_n) .

Interpréter le résultat.

EXERCICE IV

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3.$$

On note \mathcal{C}_f la représentation graphique de la fonction f et \mathcal{D} la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{D}

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe \mathcal{C}_f et la droite \mathcal{D} ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe \mathcal{C}_f , N le point d'abscisse x de la droite \mathcal{D} et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ que l'on déterminera.
En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction \mathcal{A} définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t - 3)] dt.$$

1. Hachurer sur le graphique donné en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathcal{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction \mathcal{A} est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathcal{A}(x)$.
4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathcal{A}(x) = 2$?

Exercice IV (spécialité)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition. Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,

I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,

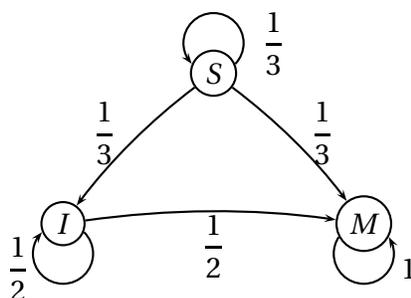
M : « l'individu est malade et infecté ».

Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = (s_n \ i_n \ m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n -ième semaine.

On a alors $P_0 = (0,99 \ 0 \ 0,01)$ et pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} s_{n+1} &= \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} &= \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} &= \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n ,
 $P_{n+1} = P_n \times A$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.
3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2} .
Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \ I_n \ M_n)$ où S_n , I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n -ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n , on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0,01 \ 0,10 \ 0,89)$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2} .

1. Exprimer S_{n+1} , I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n , I_n et M_n .
2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

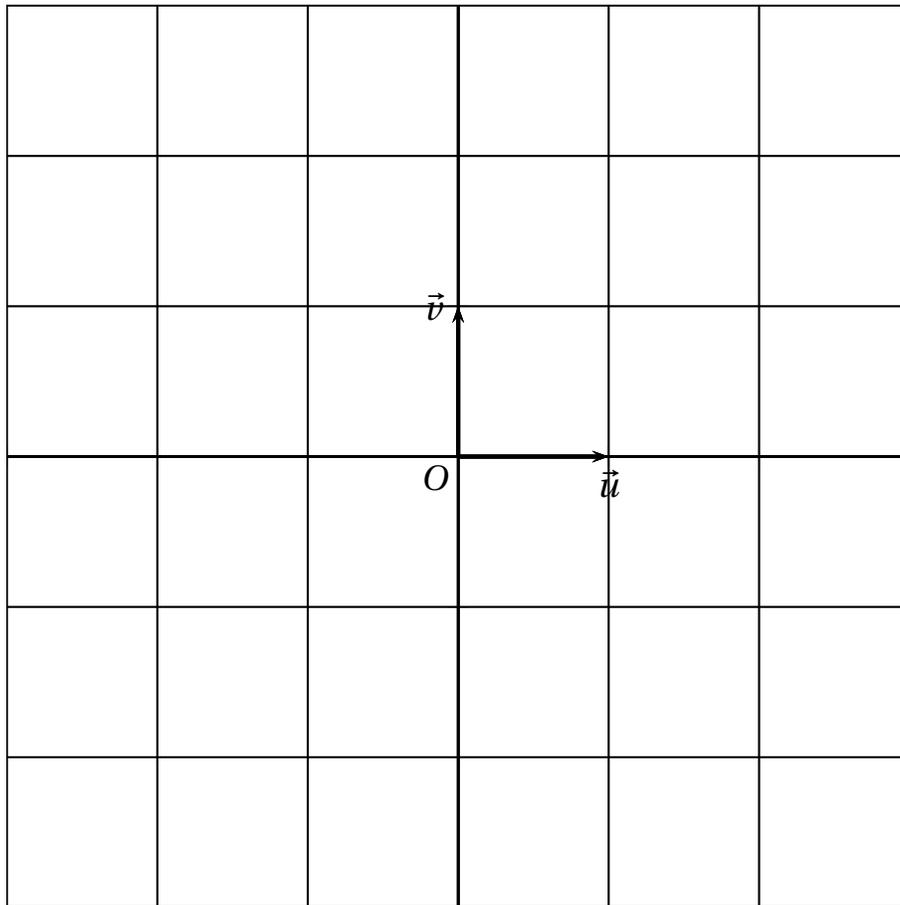
On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

3. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \left(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3}\right)$.

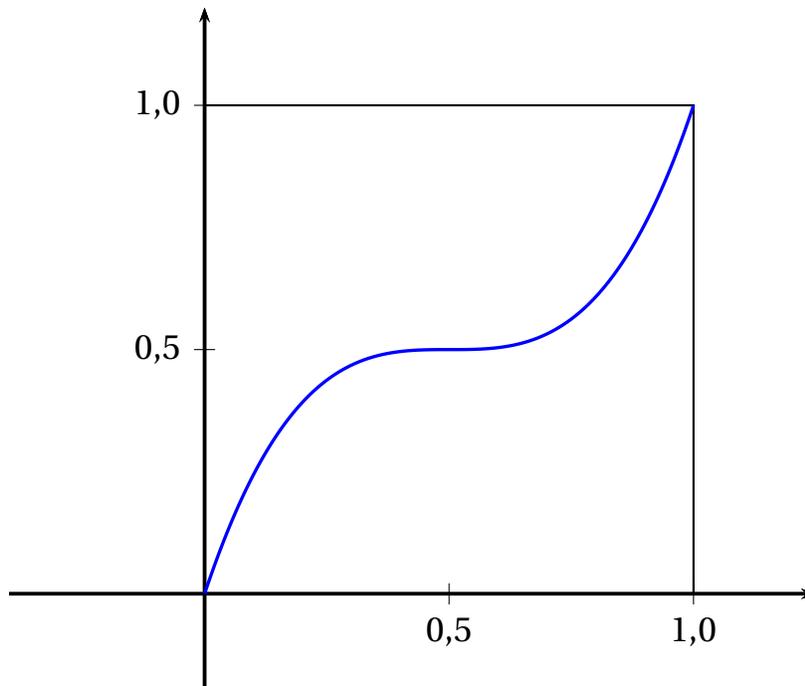
(b) Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.

Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

ANNEXE À L' EXERCICE I



ANNEXE À L' EXERCICE II



ANNEXE À L' EXERCICE IV (ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE)

