TS1-TS2 : devoir sur table commun n° 5 (4 heures)

Il faut traiter les exercices I, II, III et l'exercice IV (**en fonction de l'enseignement de spécialité suivi).**

Exercice I

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ de l'annexe (à rendre avec la copie).

L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. (a) Vérifier que $1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   (b) En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}.$$
   (b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose 00
   $$d_n = \left|z_{n+1} - z_n\right|.$$
   (a) Interpréter géométriquement d_n.
   (b) Calculer d_0.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
   $$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z_{n+1} - z_n\right).$$
   (d) En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n :
   $$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$
4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n,
   $$\left|z_{n+1}\right|^2 = \left|z_n\right|^2 + d_n^2.$$
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.
   (c) Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.
   (d) Justifier cette construction.

Exercice II

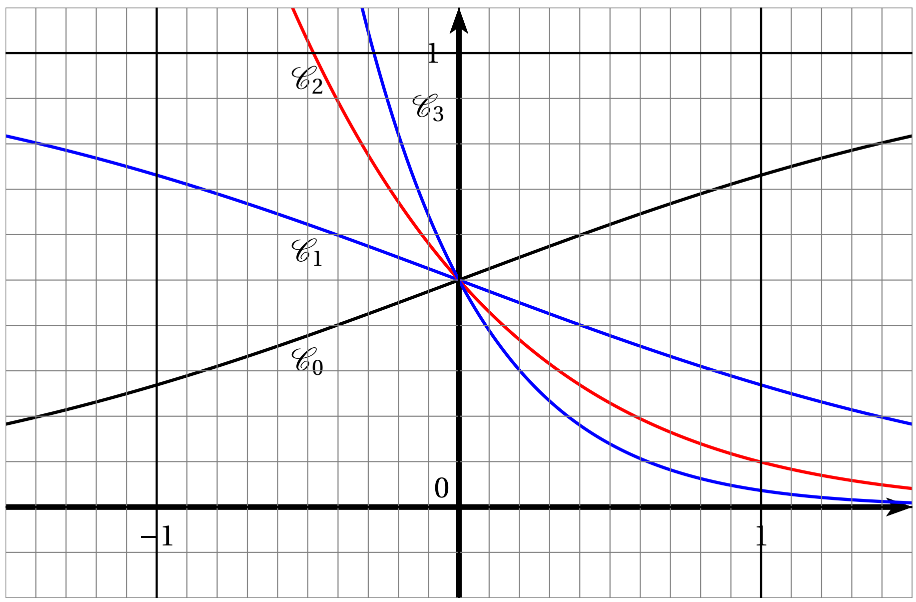
1. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.
   (a) Démontrer par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 1.$$
   En déduire que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Calculer u_1 ; u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous la forme d'une fraction irréductible.
   (c) Comparer les quatre premiers termes de la suite (u_n) et les quatre premiers termes de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.
   (d) Démontrer que la suite (w_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n).
   (e) En déduire que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = w_n.$$
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général :
   $$v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$
   (a) Démontrer que : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln(4)$.
   (b) Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel n non nul par :
   $$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$
   Exprimer S_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice III

Soit n un entier naturel. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous.



1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. **Étude de la fonction f_0.**
   (a) Étudier le sens de variation de f_0.
   (b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ces limites.
   (c) Dresser le tableau de variation de f_0.
3. **Étude de la fonction f_1**
   (a) Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout réel x.
   (b) En déduire les limites de f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   (c) Donner une interprétation géométrique de 3.(a) pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$.
   (a) Vérifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout réel x, on a :
   $$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$
   (b) Étudier les limites la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A(1 ; 1 ; 1) appartient-il au plan P_m ?
2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d)\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 12-2t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

3. (a) Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.
   (c) Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.
4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10\leqslant m\leqslant 10 \quad \text{et} \quad -10\leqslant m'\leqslant 10.$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

   (a) Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.
   (b) Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)\left(m'-1\right)+\frac{mm'}{4}=0.$$

   (c) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $\left(mm'\right)^2+16(m-1)\left(m'-1\right)+4mm'=0$
	Alors Afficher $\left(m\,;\ m'\right)$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

   Quel est le rôle de cet algorithme ?

   (d) Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\,;\ 1)$, $(0\,;\ 1)$ et $(5\,;\ -4)$.
   Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

Exercice IV (spécialité)

Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité, ***à faire sur feuille séparée*** *:*

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2.
   On donne $M^3 = \begin{pmatrix}20&10&11\\12&2&9\\42&20&21\end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

Partie B Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation
$y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A$(1\,;\,1)$, B$(-1\,;\,-1)$ et C$(2\,;\,5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que

$$M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on considère les points A$(1\,;\,p)$, B$(-1\,;\,q)$ et C$(2\,;\,r)$.

On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$. avec a, b et c entiers. alors

$$\left\{\begin{array}{lcl}-3p+q+2r & \equiv & 0\,[6]\\ 3p-3q & \equiv & 0\,[6]\\ 6p+2q-2r & \equiv & 0\,[6]\end{array}\right.$$

2. En déduire que $\left\{\begin{array}{lcl}q-r & \equiv & 0\,[3]\\ p-q & \equiv & 0\,[2]\end{array}\right.$.
3. Réciproquement, on admet que
   si $\left\{\begin{array}{lcl}q-r & \equiv & 0\,[3]\\ p-q & \equiv & 0\,[2]\\ \multicolumn{3}{l}{\text{A, B, C ne sont pas alignés}}\end{array}\right.$
   alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.
   (a) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.
   (b) On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE de l'Exercice II