TS1-TS2 : devoir sur table commun n° 4 (4 heures)

Il faut traiter les exercices I, II, III et l'exercice IV (**en fonction de l'enseignement de spécialité suivi).**

Exercice I

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

   (a) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

   (c) En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.
7. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 1)]$.
8. En déduire que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
9. Etudier la position relative de Δ et de $\mathscr{C}$.

Exercice II

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points A$(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et B$(-2\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

— la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. (a) Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.

   (b) Montrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées $(-2+u\ ;\ 1+u\ ;\ -1-u)$.

3. Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$ et passe par le point M.
4. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\ ;\ 3-3u\ ;\ -1)$.
5. (a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$.

   (b) Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
6. (a) Exprimer MN^2 en fonction de u.

   (b) En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.

Exercice III

1. Donner la forme algébrique de $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{5-3\mathrm{i}}$.
2. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z-2+5\mathrm{i}|=8$.
3. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z-1+4\mathrm{i}|=|z-2-5\mathrm{i}|$.
4. Résoudre l'équation $(2\mathrm{i}+z)(z+\mathrm{i}(3-z))=0$.
5. Résoudre l'équation $\mathrm{i}\overline{z}+7=2z+2\mathrm{i}$
6. Résoudre l'équation $1-2z=3\mathrm{i}z+5-\mathrm{i}$.
7. On suppose connu le résultat suivant : pour tous nombres complexes z et z', $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.
   Démontrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
8. Soit $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   (a) Calculer z^2 puis z^4.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, z^{4n} est un nombre réel.

Exercice IV (pour les non spécialistes)

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. Calculer d_1 et a_1.
2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

   L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$ A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

   (a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
   Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

   (b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
   Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

   (b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

   (c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

   (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
   $2^n \geqslant n^2$.

   (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
   $0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.

   (d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

Exercice IV (exercice de spécialité)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Un message peut prendre deux formes : soit « oui », soit « non ». Il est transmis oralement entre plusieurs intermédiaires. Un intermédiaire transmet la plupart du temps au suivant le message qu'il a entendu, mais il a 10% de chances de se tromper.
On appelle p_n la probabilité que le message transmis par le n^{e} intermédiaire est « oui » et q_n la probabilité que le message transmis par le n^{e} intermédiaire est « non ».
On suppose que $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Calculer p_1 et q_1.
2. Sachant que la situation peut être représentée par une marche aléatoire, donnez sa matrice de transition M.
3. Quelle est la probabilité que le 20^{e} intermédiaire entende le message originel ? Commenter.

Partie B

Une entreprise qui produit des bonbons a beaucoup de mal à écouler son stock de bonbons kaki.
Pour s'en débarrasser, elle décide de faire des lots comprenant des bonbons bleus (qui se vendent très bien) et des bonbons kaki.
Elle dispose de 1 430 bonbons bleus et de 910 bonbons kaki.
Elle souhaite écouler totalement ces deux stocks et faire des lots dont la composition est identique.

1. Expliquer pourquoi l'entreprise peut faire PGCD(1430; 910) lots.
2. Calculer ce nombre et expliquer de quoi sont composés les lots.
3. D'autres compositions sont possibles, en faire la liste en justifiant que vous avez épuisé toutes les possibilités.
4. Si l'entreprise disposait d'un stock de 1 430 000 bonbons bleus et de 910 000 bonbons kaki, quelle composition de lots pourriez-vous proposer ?