TS1-TS2 : devoir sur table commun n° 3 (4 heures)

Il faut traiter les exercices I, II, III et l'exercice IV (**en fonction de l'enseignement de spécialité suivi).**

Exercice I

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.
  On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
	...	...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

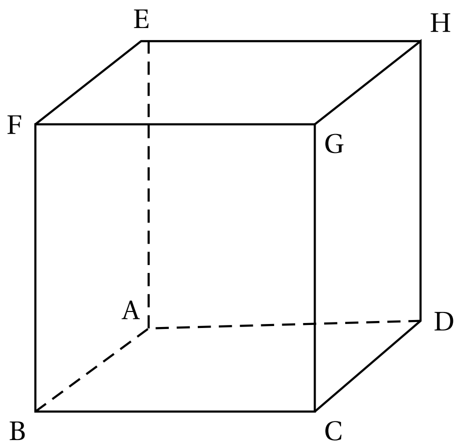
1. (a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
   Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.
   (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
   (b) En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**ø.
4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   (a) Que fait cet algorithme ?
   (b) Quelle valeur affiche-t-il ?

Exercice II

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I(1 ; \frac{1}{3} ; 0)$, $J(0, \frac{2}{3}, 1)$, $K\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$ et $L(a ; 1 ; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique :

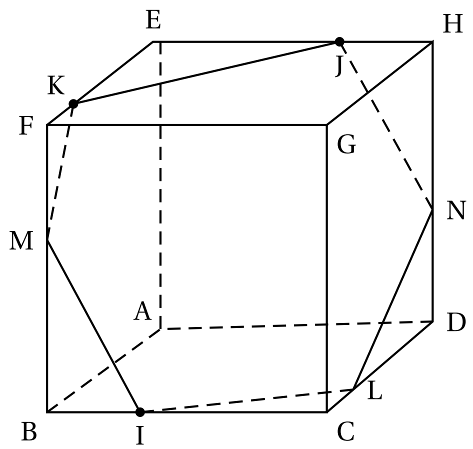
$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right. \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{3}{4}$.

PARTIE B

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$. Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.
2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
   On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



   Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.
   (a) Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK).
   (b) En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x+9y+5z-11=0$.
   (c) En déduire les coordonnées des points M et N.

Exercice III

On considère la fonction fdéfinie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$. et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité :1 cm),

1. **Etude d'une fonction auxiliaire**
   On pose $g(x) = x^3+3x+8$.
   (a) Étudier le sens de variation de g, et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.
   (b) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f.
   (b) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.
3. (a) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = 0$.
   (c) En déduire que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = x$ et étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
   Vérifier en particulier que $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un unique point A.
4. Déterminer les abscisses des points B et B' de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à Δ.
5. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$; en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.

Exercice IV

À traiter par les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Il est attribué 1,25 point par réponse exacte correctement justifiée. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées :

$$A(3\,;\,-1\,;\,4),\quad B(-1\,;\,2\,;\,-3),\quad C(4\,;\,-1\,;\,2).$$

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$2x-3y+2z-7=0.$$

La droite Δ a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t\\ y &=& 4-t\\ z &=& -8+2t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x+5y+z-5=0$.

Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+s-2s'\\ y &=& 1-2s+s'\\ z &=& 1-4s+2s'\end{array}\right.,\ s\in\mathbb{R},\ s'\in\mathbb{R}$$

appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan $\mathcal{P}$ qui contient la droite Δ.

Exercice IV (spécialité)

À traiter par les élèves suivant l'enseignement de spécialité.

Partie A

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Normalement, en mathématiques, on écrit un nombre en base 10, avec les chiffres usuels $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$:

$$1546=1\times10^3+5\times10^2+4\times10+6$$

$$681=6\times10^2+8\times10+1$$

On peut aussi choisir d'ajouter deux chiffres α et β aux dix chiffres usuels. On obtient une nouvelle écriture qu'on appelle écriture en base 12. Par exemple :

$$\overline{93}^{12}=9\times12+3=111 \text{ en base } 10$$

$$\overline{\beta\alpha7}^{12}=\beta\times12^2+\alpha\times12+7=11\times12^2+10\times12+7=1711 \text{ en base } 10$$

1. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

   $$N_1=\overline{\beta1\alpha}^{12}$$

   Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
2. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

   $$N_2=1131=1\times10^3+1\times10^2+3\times10+1$$

   Déterminer, à l'aide de divisions euclidiennes successives, l'écriture de N_2 en base 12.
3. Dans cette question, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N=\overline{a_n\cdots a_1a_0}^{12}$. Démontrer que $N\equiv a_0\quad[3]$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

Partie B

Deux machines A et B d'une usine on une probabilité de tomber en panne de $0,01$ et de $0,008$ respectivement. Sachant que la machine A est en panne, la machine B a une probabilité de $0,4$ de tomber en panne.

1. Quelle est la probabilité que les deux machines soient en panne ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

Partie C

1. Détaillez le calcul de $A\times B$ si $A=\begin{pmatrix}5&-2\\-1&3\end{pmatrix}$ et

   $B=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$
2. Déterminer tous les nombres x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix}1&x\\y&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2x+y\\-4+x^2&-3\end{pmatrix}$