TS1-TS2 : devoir sur table commun n° 2 (4 heures)

Il faut traiter les exercices I, II, III (**en fonction de l'enseignement de spécialité suivi**) et l'exercice IV.

I

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.
2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.
   Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
   Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.
   L algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel.
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$
	Afficher v.
	Fin de boucle.

   (a) Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

   (b) Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?
   (c) On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
   Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.
3. On programme la machine de façon que :
   — à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
   — toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.
   On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
   Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.
   Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   (d) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

II

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. (a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

   Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

   Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   (b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

   (b) montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

III

Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, ***en justifiant*** *la bonne réponse.*
Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.* L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t+2t' \\ y &=& -t-2t' \\ z &=& -1-t+3t' \end{array}\right.$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t \\ y &=& -t \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$

On donne les points de l'espace M$(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et N$(1\ ;\ -2\ ;\ 9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

   a. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& 1-2t \\ z &=& -1+3t \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+2t' \\ y &=& 1-t+t' \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+t' \\ y &=& 1-t-2t' \\ z &=& 1-t-3t' \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t+t' \\ y &=& 1-2t+2t' \\ z &=& -1-t' \end{array}\right.$

2. (a) La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point A$(-8\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   (b) La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
   (c) La droite (D) est une droite du plan (P).
   (d) La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
3. (a) La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
   (b) La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
   (c) La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
   (d) La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.
4. (a) Les plans (P) et (S) sont parallèles.
   (b) La droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& -2-t \\ z &=& -3-t \end{array}\right.$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
   (c) Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
   (d) Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

III (spécialité)

Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Partie A

Les questions de cette partie sont indépendantes.

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 13 de 100^{2015}
2. (a) Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
   (b) Montrer que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0[8]$ ou $x^2 = 4[8]$.
   (c) Soient a, b et c trois entiers impairs, déterminer le reste modulo 8 de $A = a^2 + b^2 + c^2$.
   (d) De même, toujours si a, b et c sont impairs, déterminer le reste modulo 8 de $B = 2(ab + bc + ca)$. *Indication :* développer $(a + b + c)^2$.
   (e) En déduire que A et B ne sont pas des carrés.

Partie B

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4% des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

IV

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.
   (a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   (d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
   (a) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   (b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -4t-2 \\ y &=& t \\ z &=& 3t+2 \end{array}\right., \quad t \in \mathbb{R}.$$
   (c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?