TS1-TS2 : contrôle commun n° 1 (3 heures)

I

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n
$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2.$$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$-1 \leqslant v_n \leqslant 0.$$
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right).$$
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).
   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
   Déterminer la valeur de ℓ.
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On note α la solution.
   On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
   Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4. (a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

   où α est le réel défini dans la question 2.

   (b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

   (a) Calculer S_0, S_1 et S_2.
   Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

   (b) Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

   (c) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

III

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier tenue u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

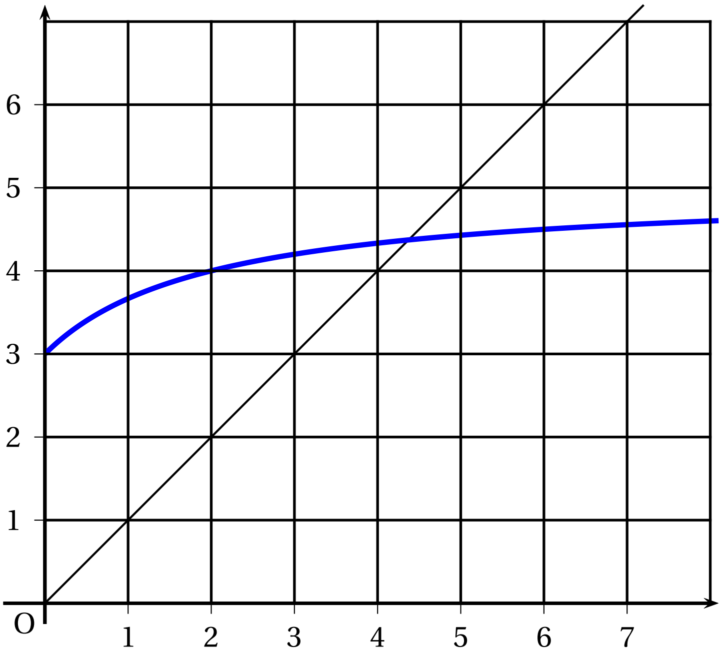
En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
   (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
   (b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
   Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   (c) La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Feuille à rendre avec la copie

Annexe 1 l'exercice II



Annexe 2 de l'exercice II

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que ...
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur ...
	Affecter à s la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s.