TS : devoir sur feuille n° 5

« La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul. » [Galilée]

I

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$.

On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.
2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - \text{i}\sqrt{2}$.
   (a) Exprimer a sous forme exponentielle.
   (b) En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.
3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω.
   (a) À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - \text{i}z - 1 + \text{i} = 0$ et $z \neq 1$.
   (b) Montrer que $z^2 - \text{i}z - 1 + \text{i} = (z-1)(z+1-\text{i})$.
   (c) En déduire l'ensemble Γ_3.
5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.
   (a) Exprimer $\left(\overrightarrow{\text{O}M}, \overrightarrow{\text{O}M'}\right)$ en fonction d'un argument de z.
   (b) En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.

II Équation du second degré à coefficients complexes

Nous avons vu comment résoudre (dans $\mathbb{C}$) une équation du second degré à coefficients réels.
Comment faire si l'équation est à coefficients complexes ?
Voici la démarche expliquée sur un exemple.

On considère l'équation (E) : $\text{i}z^2 - 2z + 4\text{i} + 12 = 0$.

1. En factorisant par i, donner la forme canonique de $f(z) = \text{i}z^2 - 2z + 4\text{i} + 12$.
2. Pour pouvoir continuer la factorisation, on souhaite trouver un nombre complexe de la forme $a + \text{i}b$, a et b réels, tel que $(a + \text{i}b)^2 = -5 + 12\text{i}$.
   (a) Développer $(a + \text{i}b)^2$ et en déduire que trouver les réels a et b tels que $(a + \text{i}b)^2 = -5 + 12\text{i}$ équivaut à résoudre le système (S) $\left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{array}\right.$
   (b) Résoudre ce système et en déduire un couple solution.
3. En déduire une factorisation de la forme canonique, puis la résolution de l'équation (E).

III Quand boire sa tasse de café ?

On souhaite étudier la loi de refroidissement d'une tasse de café chaud.

On suppose que la température ambiante de la pièce dans laquelle se trouve le café est constante et égale à 20 °C.
On note $f(t)$ la température (en °C) du café à l'instant t (en min).
Ainsi, $f'(t)$ représente la vitesse de refroidissement à l'instant t (ou taux de perte de chaleur).
La loi de refroidissement, énoncée par Sir Isaac Newton est : « La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant ».
Ici, on estime que cette loi aboutit à la condition (E) :

$$(\text{E}) : f'(t) = -0,2[f(t) - 20].$$

1. Soit f la fonction définie par $f(t) = k\text{e}^{-0,2t} + 20$, $k \in \mathbb{R}$.
   Montrer que f vérifie la condition (E).
   On admet que toutes les fonctions vérifiant cette relation (E) sont les fonctions f définies par :
   $$f(t) = k\text{e}^{-0,2t} + 20, \ k \in \mathbb{R}.$$
2. Sachant qu'à l'instant $t = 0$, le café a une température initiale de 80 °C en le versant dans la tasse, vérifier que, au bout de t minutes, la température du café est
   $$f(t) = 60\text{e}^{-0,2t} + 20.$$
3. Quelle est la température du café au bout de 5 minutes ?
4. Vérifier que la température du café diminue au fil du temps, et indiquer la température « limite » du café à long terme.
5. Quelqu'un souhaite boire son café à une température de 40 °C. Combien de temps doit-il attendre ?

IV

Partie A : restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{i}~;~\vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x).$$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1~;~+\infty[$.

2. (a) Montrer que, pour tout x de $[1~;~+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

.

(b) En déduire le sens de variation de f sur $[1~;~+\infty[$.

(c) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

(d) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

(b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

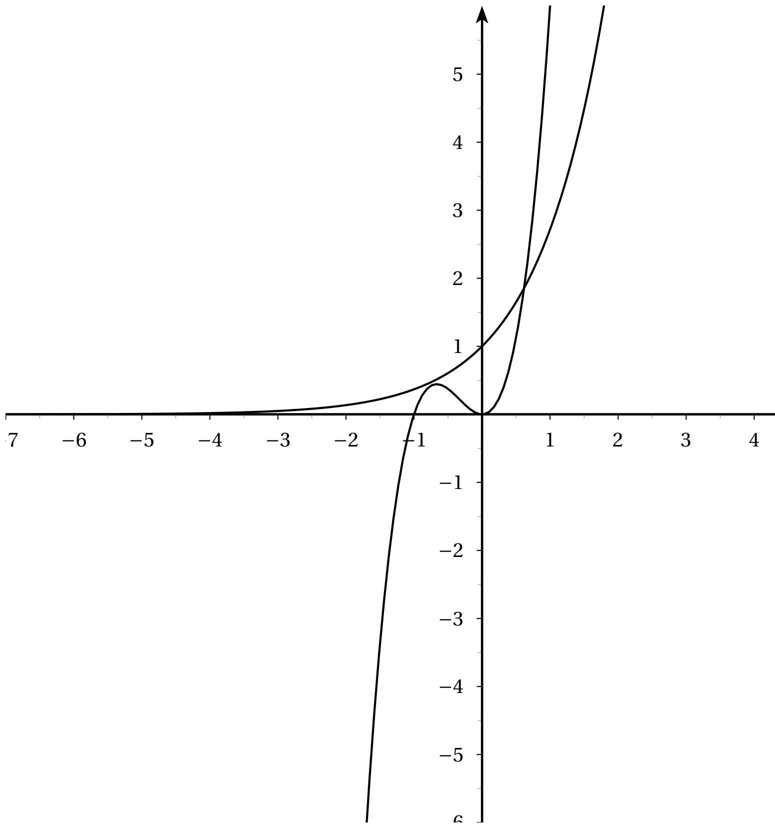
V

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle :

$$\mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$$

PARTIE A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

PARTIE B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. (a) Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

(b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty~;~-1]$.

(c) Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel x de $]-1~;, 0[\cup]0~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1 + x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1~;~0[\cup]0~;~+\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $h(x) = 0$.

3. (a) Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à $]-1~;~0[\cup]0~;~+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$$

(b) Déterminer les variations de la fonction h.

(c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

4. Conclure quant à la conjecture de la **partie A**.